2015학년도 대학수학능력시험 수학 B형 해설

1. [행렬의 연산]

$A+B=\begin{pmatrix}2&2\\3&2\end{pmatrix}$ 모든 성분의 합은 9이다.

2. [함수의 극한]

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3x}=\frac{1}{3}$

3. [삼각함수의 합성]

$f(x)=2\sqrt{2}\,sin(x+\alpha)-\sqrt{2}\le\sqrt{2}$

4. [적분법]

$\int_0^1 3\sqrt{x}\,dx=2$

5. [공간좌표]

$\frac{a-6}{3}=0, \frac{2b-2}{3}=0\to\quad a=6, b=1$

$\therefore a+b=7$

6. [일차변환]

$(f\circ g)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1\\10&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

$\therefore a=3$

7. [무한등비급수]

$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ **에서** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\frac{81}{8}$

8. [확률]

$P\left((A^C\cup B)^C\right)=1-P(A^C\cup B)$

$A^C\cap B=\varnothing$

$1-P(A^C\cup B)=1-P(A^C)-P(B)=\frac{3}{10}$

9. [정적분과 무한급수]

$x_k=1+\frac{2k}{n}, \Delta x=\frac{2}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_1^3 f(x)dx$

$f(x)=\frac{1}{x}$ 이므로 $\int_1^3\frac{1}{x}dx=\ln 3$

10. [이차곡선 - 포물선]

$\overline{AF}=a, \overline{BF}=b$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{p}$ 에서, $a=4, p=3$

$b=12$

$\therefore \overline{BD}=\overline{BF}=12$

11. [정규분포]

과자 1봉지 무게의 확률분포를 X

표준정규분포로 고치면

$P(76\le X\le 78)=P(0.5\le z\le 1.5)=0.2417$

12. [공간도형 - 삼수선의 정리]

P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H'

H에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H''

$\overline{PH'}=3\sqrt{3}$, $\overline{PH}=4$이므로

$\overline{H'H''}=\sqrt{11}$ ($\because$ 삼수선의 정리)

13. [수열의 극한]

$a>3$에서 $\frac{a}{3}>1$이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}+1}=\left(\frac{a}{3}\right)^{k-1}$$

$a^{k-1}=3^k$**에서** $a=3^{\frac{k}{k-1}}$

$\therefore \left(\frac{a}{3}\right)^{k-1}=3$

14. [미분법]

P에서 $y=3^x$에 접하는 직선을 l_1

P에서 $y=a^{x-1}$에 접하는 직선을 l_2

$l_1 : y=\ln 3\ \ 3^k(x-k)+3^k$

$l_2 : y=\ln a\ \ a^{k-1}(x-k)+a^{k-1}$

$A\left(k-\frac{1}{\ln 3},0\right)$, $B\left(k-\frac{1}{\ln a},0\right)$에서

$a>3$이므로

B는 A보다 오른쪽에 있다.

따라서 B는 A와 H의 중점이다.

$2\left(k-\frac{1}{\ln a}\right)=2k-\frac{1}{\ln 3}$, $\qquad a=9$

제작자 : ThrowItAway, 게크로맨서, Kudoya

홀수형 기준입니다

2015학년도 대학수학능력시험 수학 B형 해설

15. [조건부확률]

남학생 수를 a, 여학생 수를 b라 하자.

	남학생	여학생	계
가입	$0.6a$	$0.5b$	$0.6a+0.5b$
비가입	$0.4a$	$0.5b$	$0.4a+0.5b$
계	a	b	320

$P_1 = \dfrac{6a}{6a+5b}$, $P_2 = \dfrac{5b}{6a+5b}$

$P_1 = 2P_2$이므로, 정리하면

$\begin{cases} b = \dfrac{3}{5}a \\ a+b=320 \end{cases}$, $a=200, b=120$

따라서 남학생 수는 200명이다.

16. [행렬 합답형 문제]

ㄱ. $A(A-B)=3E$에서

$A^{-1} = \dfrac{A-B}{3}$ **(참)**

ㄴ. $B=A-3A^{-1}$이므로

$AB=BA$ **(참)**

ㄷ. ㄴ에 의해

$AB(A-B)=A+B$

$A(A-B)=3E$이므로

$A=2B$

즉, $(A+2B)^2=4A^2$

식을 전개하면,

$A^2+4AB+4B^2=4A^2$

$AB=A^2-3E$를 대입

$A^2+4B^2=2A^2=12E$

$4A^2=(A+2B)^2=24E$ **(참)**

정답은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

17. [수학적 귀납법]

$b_n = b_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$b_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\cdots$ $f(n)=n$

$\vdots$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$a_n = (n^2-n+1)(n-1)!$

$g(n) = n^2-n+1$

$\therefore f(7)+g(6)=38$

18. [이산확률분포]

$P(\overline{X}=2)$가 나오는 경우의 순서쌍을 찾아보면 $(1,3),(2,2),(3,1)$인 경우이다.

i) $(1,3)$이 나오는 경우 $\dfrac{5}{64}$

ii) $(1,3)$이 나오는 경우 $\dfrac{5}{64}$

iii) $(2,2)$가 나오는 경우 $\dfrac{1}{16}$

$\therefore P(\overline{X}=2)=\dfrac{7}{32}$

19. [직선과 평면의 방정식]

평면 α의 방정식을 구하면

$2x-y+z-6=0$

삼각형 APQ에서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AP}|^2$

점과 평면 사이의 거리 공식에 의해

$\dfrac{|2a-b+c-6|^2}{6}=6$

$\dfrac{a}{2}=6-b=c-6$을 만족하므로

방정식을 a에 관하여 나타내면

$|3a-6|^2=36$, $a>0$이므로 $a=4$

따라서 $b=4, c=4$

$\therefore a+b+c=16$

20. [삼각함수의 극한 - 도형]

$\overline{AC}=2\cot\dfrac{\theta}{2}$

사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin 2\theta}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}$

$\overline{AB}=\overline{BC}=\dfrac{\cot\dfrac{\theta}{2}}{\cos\theta}$

다시 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin\theta}$

$\overline{CD}=\dfrac{2\sin\theta\cot\dfrac{\theta}{2}}{\sin 3\theta}$

제작자 : ThrowItAway, 게크로맨서, Kudoya

2015학년도 대학수학능력시험 수학 B형 해설

$S(\theta)=\frac{\sin\theta}{2}\overline{BC}\cdot\ \overline{CD}$

$\therefore \lim_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\}=\frac{4}{3}$

21. [지수함수의 응용 - 수열]

$(1,0)$과 $(2^m,m)$를 지나는 직선을 l

$l: y=\frac{m}{2^m-1}(x-1)$

삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}(2^n-1)^2\frac{m}{2^m-1}$

$S\le\frac{m}{2}$에서

$(2^n-1)^2+1\le 2^m$

$n=1$일 때, $m=1$

$n=2$일 때, $m=4$

$n=3$일 때, $m=6$

$\vdots$

$a_n=\begin{cases}1\,(n=1)\\2n\,(n=2,3,4,\cdots)\end{cases}$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=109$

22. [로그방정식]

$x+6=32$, $x=26$

23. [미분법]

$f'(x)=-\sin x+8e^{2x}$

$\therefore f'(0)=8$

24. [방정식과 부등식]

$\sqrt{x^2-6x-1}=t$**로 치환**

$t^2+1-t=3$, $t=2,-1$

$t\ge 0$**이므로,** $t=2$

$\sqrt{x^2-6x-1}=2$**에서**

$x^2-6x-5=0$

모든 실근의 곱 $k=-5$

$\therefore k^2=25$

25. [로그의 실생활 활용]

$E_B=100E_A$

$P_A=20\log 255-10\log E_A$

$P_B=20\log 255-10\log 100E_A$

$P_A-P_B=10\log 100=20$

26. [중복조합]

$a\times b\times c$가 홀수이므로 a,b,c 모두 홀수

$a\le b\le c\le 20$의 조건에 의해

20 이하의 홀수들 중 중복하여 3개를 뽑는 경우의 수를 구하면 된다.

20 이하의 홀수는 총 10개이므로 구하고자 하는 경우의 수는 ${}_{10}H_3$

${}_{10}H_3={}_{12}C_3=220$

27. [이차곡선 - 타원]

$\overline{FF'}=2\sqrt{5}$, $\overline{FP}+\overline{F'P}=6$에서

$\overline{FP}=2,\overline{F'P}=4$

삼각형 $QF'F$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\overline{F'P}\times\overline{FQ}=12$

28. [적분법]

$f'(x)=(a-x)e^x$

$f'(x)=0$이 되게 하는 x를 찾으면

$x=a$

$f''(a)=-e^a<0$이므로 $x=a$에서 $f(x)$는 최댓값을 가진다.

$f(a)=e^a-(a+1)=32$

곡선과 두 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면,

$S=\int_0^a 3e^x dx-3a=3f(a)=96$

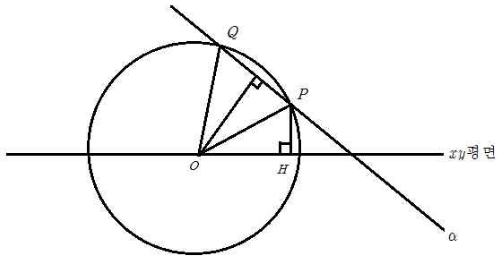
제작자 : ThrowItAway, 게크로맨서, Kudoya

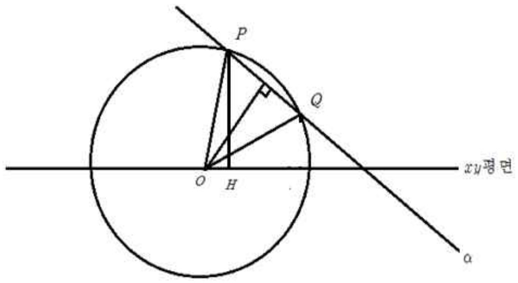
홀수형 기준입니다

2015학년도 대학수학능력시험 수학 B형 해설

29. [공간도형과 공간벡터]

구를 xy평면에 수직이고 OP를 지나는 평면으로 잘라서 단면화해보자. 이 때 P가 Q위에 있는 경우와 P가 Q아래에 있는 경우로 나눠볼 수 있다.





P를 xy평면에 정사영시킨 점을 H
이 때, $\overline{OH}=\overline{PH}=5$이다. $\overline{PQ}=2$를 만족하도록 평면 α를 잡고 xy평면과 이루는 각을 θ, $\angle POQ=2\theta_1$이라 하자.
C의 넓이를 S라 하면, $S=\pi\cos\theta$
S가 최대인 순간은 $\cos\theta$가 최대인 순간이다.

ⅰ) P가 Q위에 있는 경우

$\theta=\frac{\pi}{4}-\theta_1$, $\cos\theta_1=\frac{7}{5\sqrt{2}}$에서, $\cos\theta=\frac{4}{5}$

ⅱ) P가 Q아래에 있는 경우

$\theta=\frac{\pi}{4}+\theta_1$, $\cos\theta_1=\frac{7}{5\sqrt{2}}$에서, $\cos\theta=\frac{3}{5}$

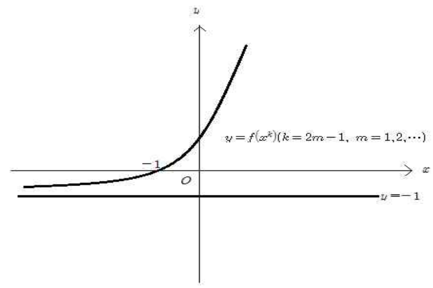
ⅰ), ⅱ)에서 $\cos\theta$의 최댓값은 $\frac{4}{5}$

$S_{\max}=\frac{4}{5}\pi$

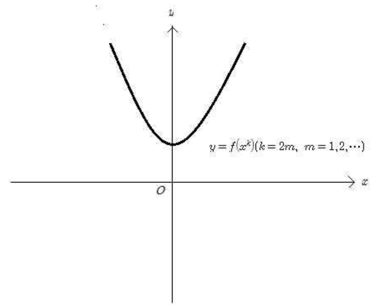
$\therefore p+q=9$

30. [미분법]

$f(x^k)$의 그래프는 k가 홀수일 때, 짝수일 때의 2가지 종류로 나뉜다.



k가 홀수일 때는 그림과 같이 $x=-1$에서 미분이 불가능하고



짝수일 때는 실수 전체에서 미분이 가능하다.

즉, $g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}\left|f(x^k)\right|$를 미분할 때, $x\geq-1$인 범위와 $x<-1$인 범위로 나누어서 해주면 된다.
이를 이용하여 $g'(x)$를 구해보면

$$g'(x)=\begin{cases}100f'(x)-\sum_{k=1}^{m}\left\{f(x^{2k})+f(x^{2k-1})\right\}(x\geq-1)\\-100f'(x)-\sum_{k=1}^{m}\left\{f(x^{2k})-f(x^{2k-1})\right\}(x<-1)\end{cases}$$

$g'(-1+0)=g'(-1-0)$이면 $g(x)$는 실수 전체에서 미분가능하다.

$g'(-1+0)=100-\left(m^2-\frac{m(m+1)}{2}e^2\right)$

$g'(-1-0)=-100-\left(-m^2-\frac{m(m+1)}{2}e^2\right)$

에서 $m=10$

$m=10$일 때, $n=19,20$이 가능하다.

따라서 모든 자연수 n의 합은 39

제작자 : ThrowItAway, 게크로맨서, Kudoya