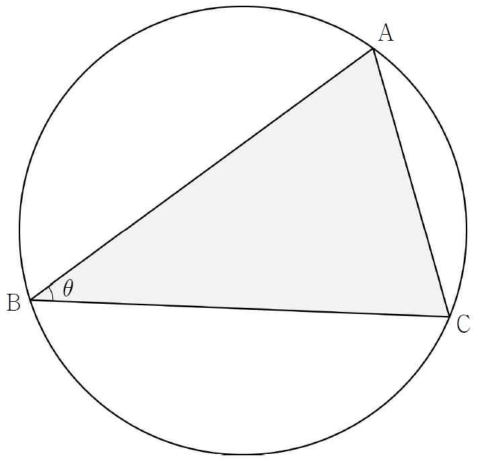
TH①. 삼각함수의 활용

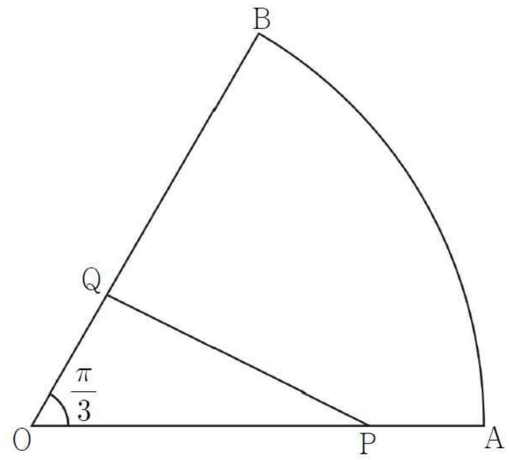
STEP 0 Base

1. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원에 내접하고 변 AC의 길이가 5인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC=\theta$라 할 때, $\sin\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$) [3점][2020년 4월 나13]



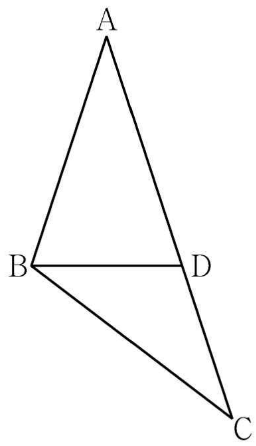
① $\frac{1}{4}$　② $\frac{3}{8}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{5}{8}$　⑤ $\frac{3}{4}$

2. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OA를 $3:1$로 내분하는 점을 P, 선분 OB를 $1:2$로 내분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$일 때 호 AB의 길이는? [3점][2020년 4월 가10]



① $\frac{5}{3}\pi$　② 2π　③ $\frac{7}{3}\pi$　④ $\frac{8}{3}\pi$　⑤ 3π

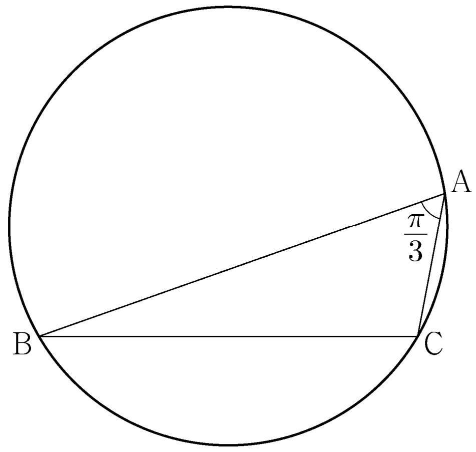
3. $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$가 되도록 잡는다. $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이는? [3점][2020년 9월 가12나25]



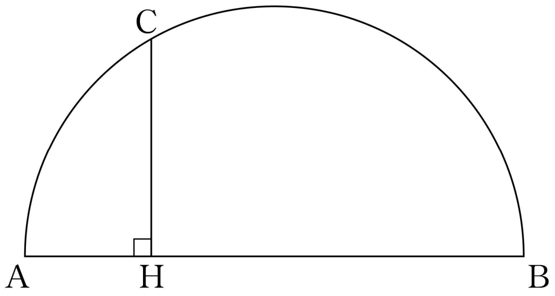
① $\sqrt{37}$ ② $\sqrt{38}$
③ $\sqrt{39}$ ④ $2\sqrt{10}$
⑤ $\sqrt{41}$

4. $\angle \mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=3:1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이는? [3점][2021학년도 수능 가10나28]

① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$
③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$
⑤ $2\sqrt{6}$



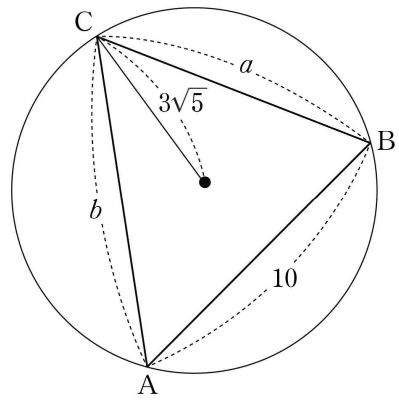
5. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원 위에서 호 BC의 길이가 4π인 점 C를 잡고 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{CH}}^2$의 값을 구하시오. [3점][2017년 3월 가25]



STEP 1 Plains

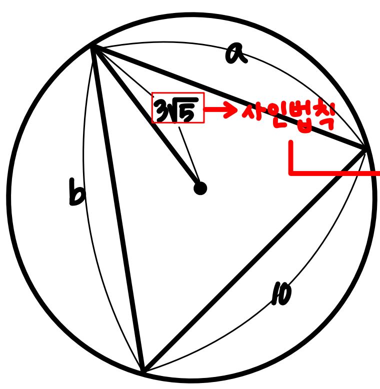
6. 길이가 각각 10, a, b인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이고 $\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$일 때, ab의 값은? [4점][2020년 3월 나19]

① 140 ② 150
③ 160 ④ 170
⑤ 180



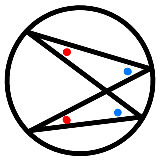
$b^2+ab\cos C$

$$\frac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\frac{4}{3}$$



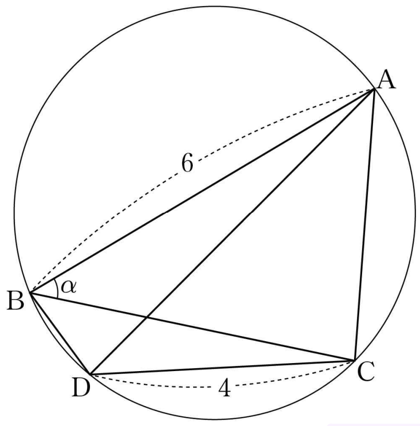
$10^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

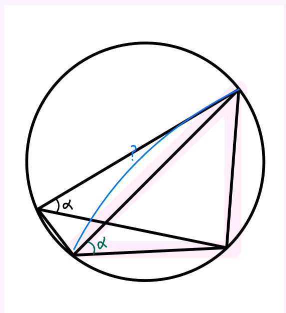
$\sin C=\dfrac{10}{2R}$ $3\sqrt{5}$

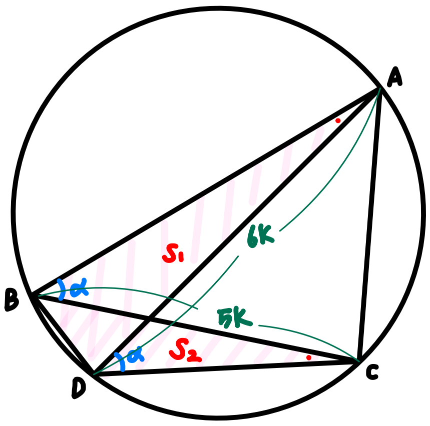


나비모양

7. 그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{AB}=6$이고, $\angle ABC=\alpha$라 할 때 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD}=4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2 = 9 : 5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점][2020년 3월 나29]







$\cos\alpha=\frac{3}{4}$

$S_1 : S_2 = 9 : 5$

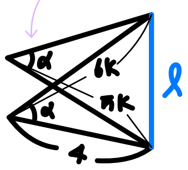
$\cancel{\frac{1}{2}}\times 6\times\overline{AD}\times\cancel{\sin x} : \cancel{\frac{1}{2}}\times 4\times\overline{BC}\times\cancel{\sin x}$

$\cancel{36}\,\boxed{\overline{BC}} = \cancel{30}\,\boxed{\overline{AD}}$

$6 \quad 5K \qquad 5 \quad 6K$

$S=\frac{1}{2}\times \boxed{6K}\times 4\times\sin\alpha$

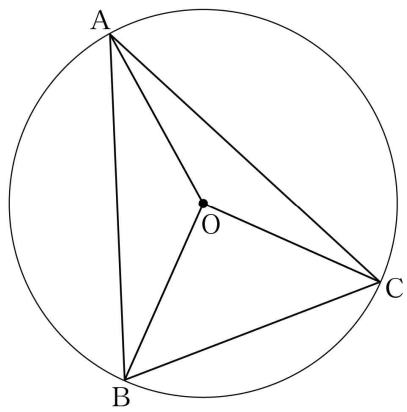
?



$\ell^2 = 16+36K^2-48K\cos\alpha$

$= 36+25K^2-60K\cos\alpha$

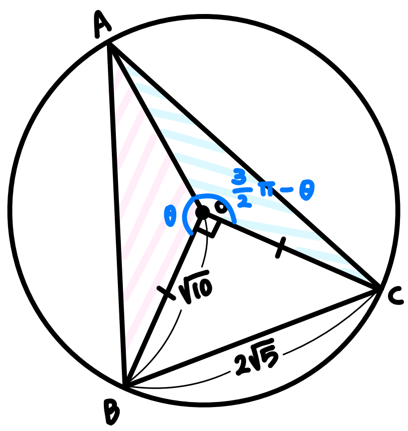
8. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1=4S_2$이고 $\overline{BC}=2\sqrt{5}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점][2020년 3월 가19]



① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$
③ $4\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{34}$
⑤ 6

$\overline{AB}=?=2R\sin C$

$\sqrt{10}$



$3S_1 = 4S_2$

$\sin\theta \qquad \sin(\frac{3}{2}\pi-\theta)$

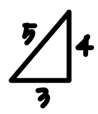
$-\cos\theta$

둔각

$\tan\theta = -\frac{4}{3}$

$AB^2 = 10+10-2\times 10\times\cos\theta$

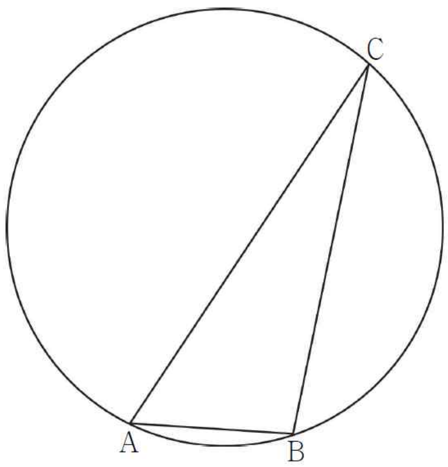
$\cos\theta<0$



$\cos\theta = -\frac{3}{5}$

나비모양

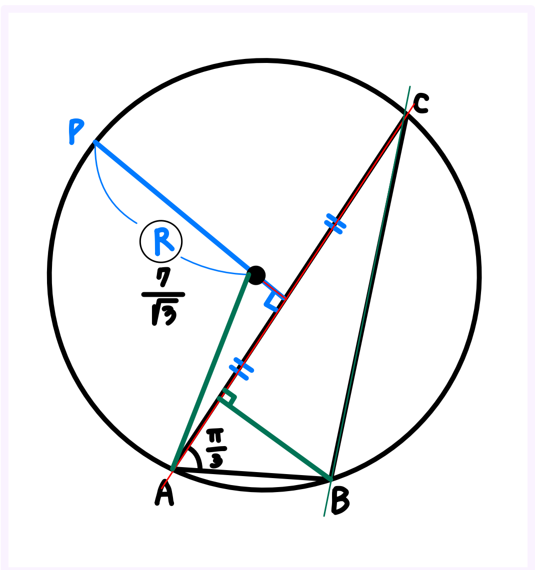
9. 그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{AB}=3$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$일 때, 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점][2020년 4월 가19]

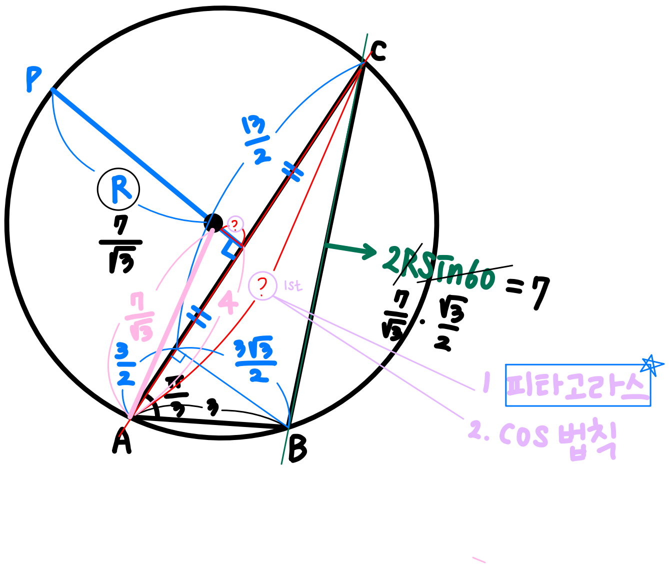


① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$ ② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$

③ $12\sqrt{3}$ ④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$

⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$



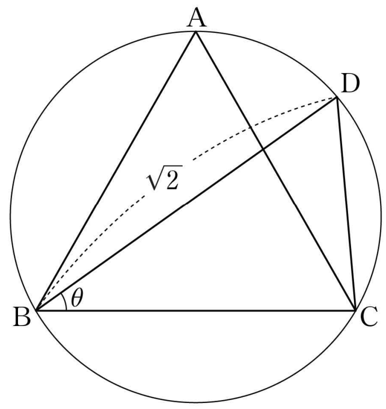


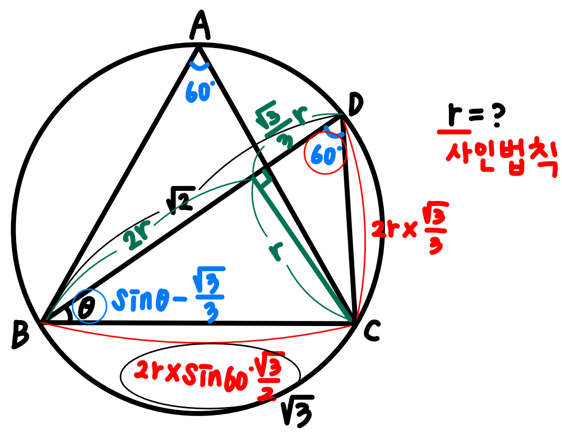
10. 정삼각형 ABC가 반지름의 길이가 r인 원에 내접하고 있다. 선분 AC와 선분 BD가 만나고 $\overline{BD}=\sqrt{2}$가 되도록 원 위에서 점 D를 잡는다. $\angle DBC=\theta$라 할 때, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다. 반지름의 길이 r의 값은? [4점][2020년 10월 나19]

① $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{6-\sqrt{5}}{5}$

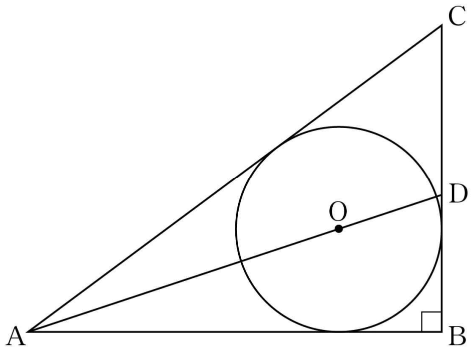
③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{6-\sqrt{3}}{5}$

⑤ $\frac{6-\sqrt{2}}{5}$





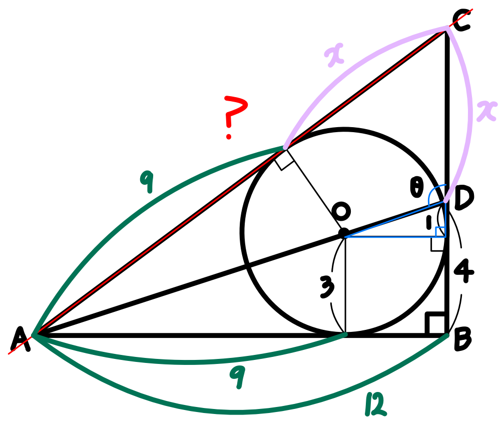
11. 그림과 같이 $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC 에 내접하고 반지름의 길이가 3 인 원의 중심을 O 라 하자. 직선 AO 가 선분 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\overline{\mathrm{DB}}=4$ 이다. 삼각형 ADC 의 외접원의 넓이는? [4점][2020년 10월 가17]



① $\frac{125}{2}\pi$　　② 63π

③ $\frac{127}{2}\pi$　　④ 64π

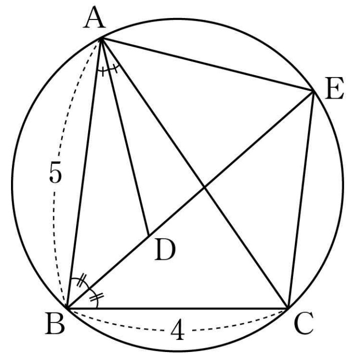
⑤ $\frac{129}{2}\pi$



$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$2R = \frac{?}{\cancel{\sin\theta}\ \frac{3}{\sqrt{10}}}$

12. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\cos(\angle \mathrm{ABC})=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC 가 있다. $\angle$ ABC 의 이등분선과 $\angle$ CAB 의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD 의 연장선과 삼각형 ABC 의 외접원이 만나는 점을 E 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점][2021년 3월 15]



〈 보 기 〉

ㄱ. $\overline{\mathrm{AC}}=6$

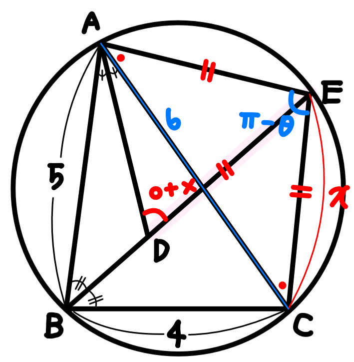
ㄴ. $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EC}}$

ㄷ. $\overline{\mathrm{ED}}=\frac{31}{8}$

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ　　④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$\cos\theta = \frac{1}{8}$

ㄱ. $\overline{AC}=6$

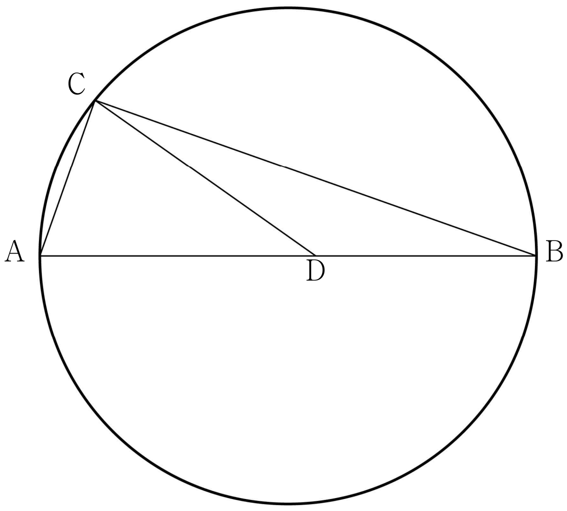
ㄴ. O

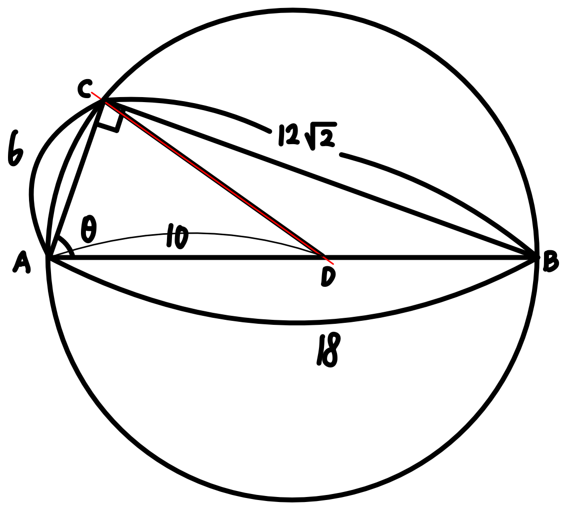
ㄷ. X ← cos 법칙

$6^2 = 2x^2 - 2x^2 \times \cancel{\cos(\pi-\theta)}$

$-\cancel{\cos\theta}\ \frac{1}{8}$

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여 $\overline{BC}=12\sqrt{2}$, $\cos(\angle CAB)=\frac{1}{3}$이다. 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점][2021년 7월 20]



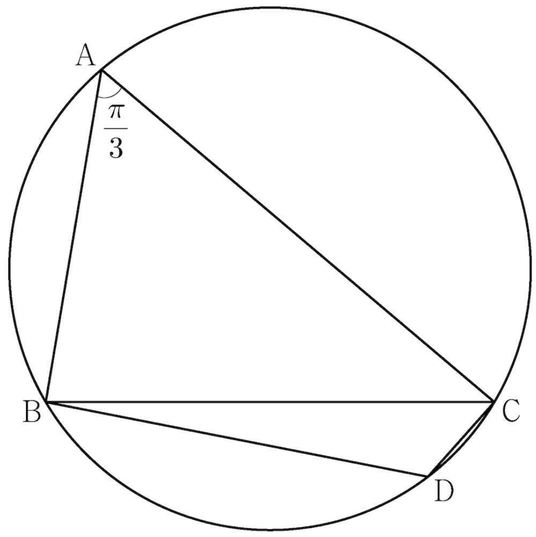


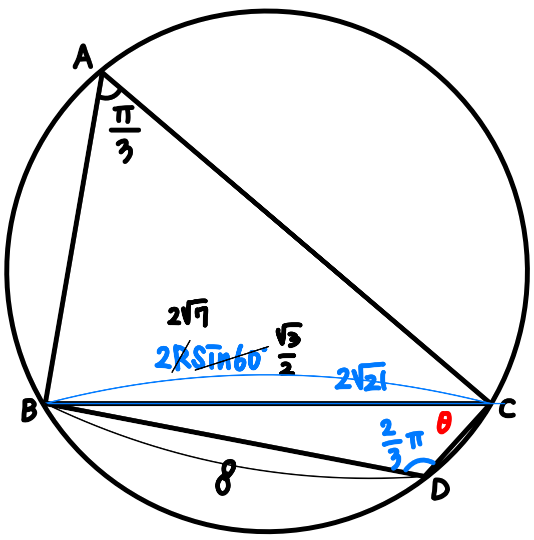
$\cos\theta=\frac{1}{3}$

$2R=\frac{\overline{CD}}{\cancel{\sin\theta}\ \frac{\sqrt{8}}{3}}$

14. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은? [4점][2021년 9월 12]

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



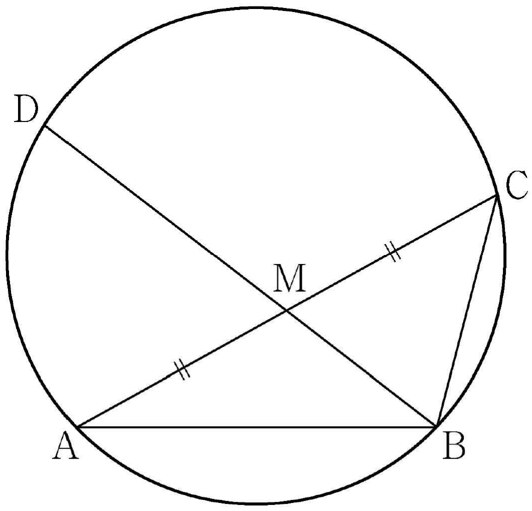


$\sin\theta=\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{2}{\sqrt{7}}$

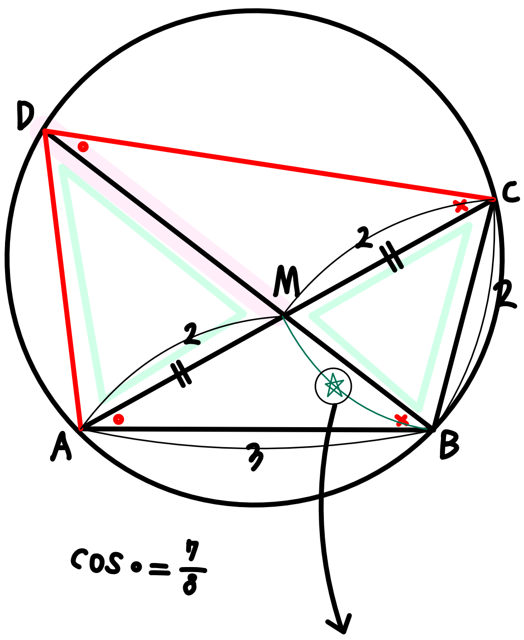
$\overline{BD}+\overline{CD}$, $x+y=?$
x y

1. cos 법칙
2. $\frac{1}{2}xy\sin\theta$

15. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점][2022년 6월 공통10]

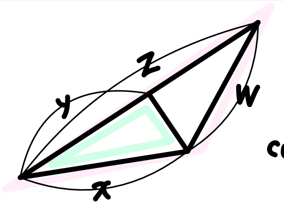


① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$



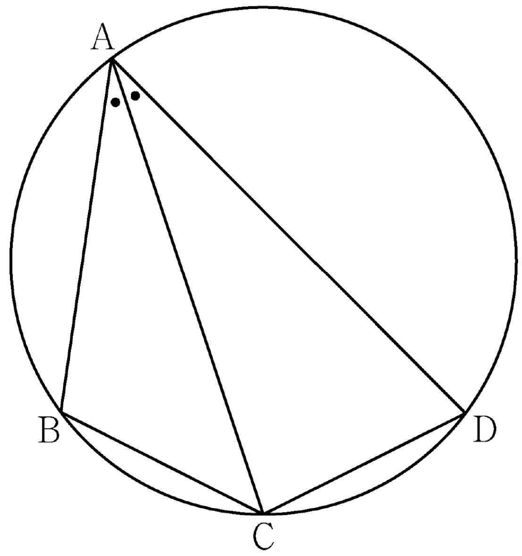
$\cos\bullet=\frac{7}{8}$

cos법칙

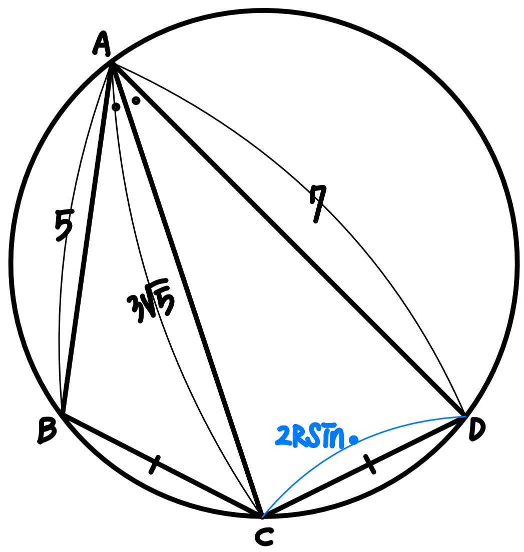


cos법칙 2번!

16. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC=\angle CAD$일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점][2023학년도 수능 공통11]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

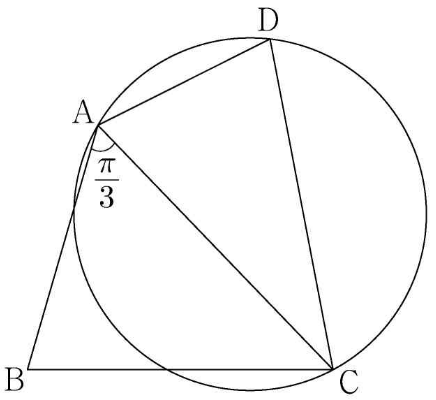


$4R^2\sin^2\bullet$

$=49+45-42\sqrt{5}\cos\bullet$

$=25+45-30\sqrt{5}\cos\bullet$

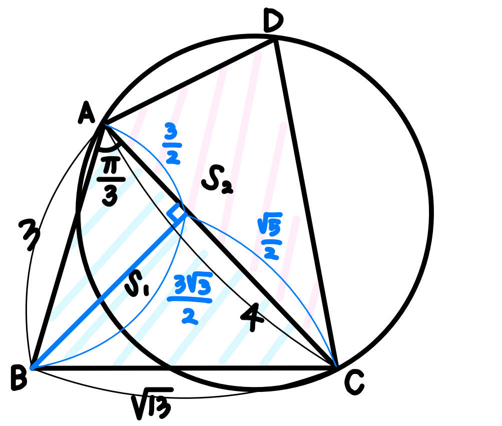
17. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$, $\overline{AD}\times\overline{CD}=9$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자. $S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은? [4점][2024학년도 수능 공통13]



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$

③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$

⑤ $\frac{72}{25}$



$$\frac{\overset{=4}{\boxed{\overline{AC}}}}{\sin\angle ADC} = 2R$$

$$\overline{AD}\times\overline{CD}=9$$

$$S_2=\frac{5}{6}S_1 \quad \frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2}\times9\times\sin\angle ADC$$

18. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점][2024년 6월 공통10]

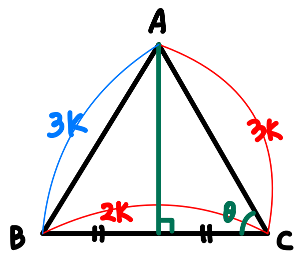
(가) $3\sin A=2\sin B$ (나) $\cos B=\cos C$ ▫

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$

③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ ④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$

⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

(나) $\underbrace{\cos B=\cos C}_{\text{Same}}$



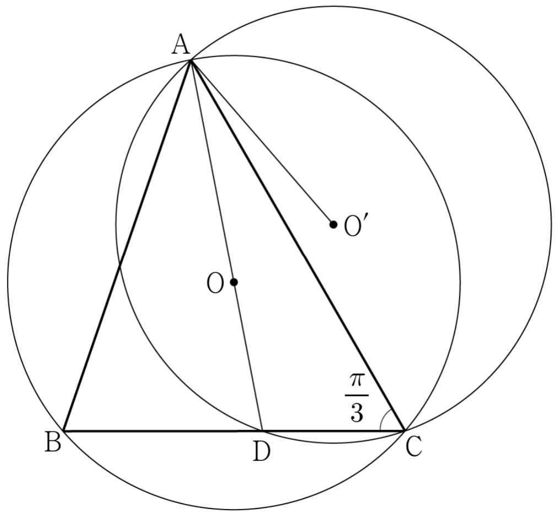
(가) $3a=2b$

2k 3k

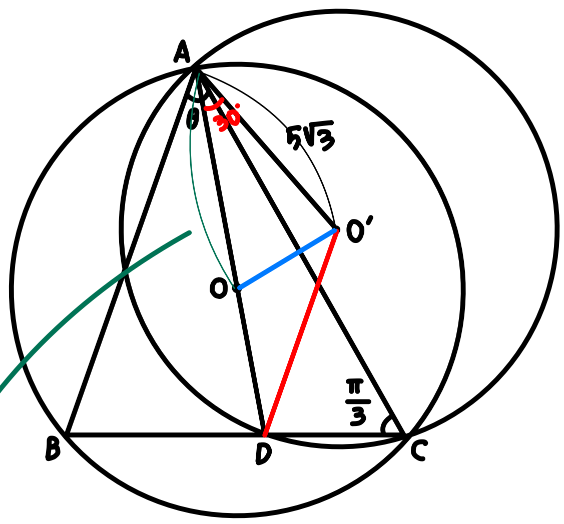
$\sin\theta=\frac{\sqrt{8}}{3}$

$\frac{3k}{\sin\theta}=2\cancel{R}\,3$

19. 그림과 같이 $\overline{BC}=\frac{36\sqrt{7}}{7}$, $\sin(\angle BAC)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$, $\angle ACB=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 직선 AO가 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ADC의 외접원의 중심을 O′이라 할 때, $\overline{AO'}=5\sqrt{3}$이다. $\overline{OO'}^2$의 값은? $\left(단,\ 0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점][2024년 7월 공통 13]



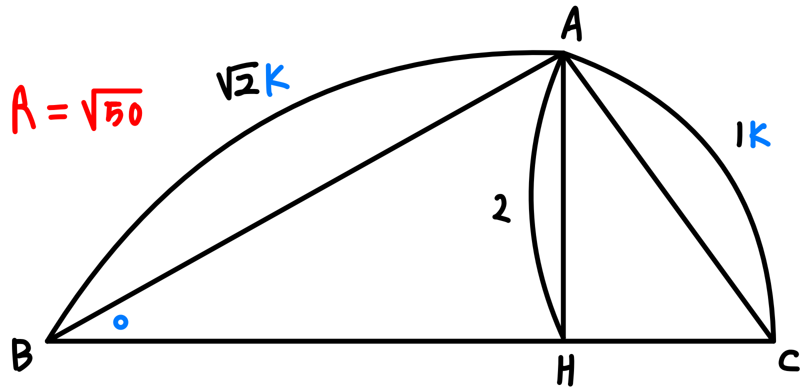
① 21 ② $\frac{91}{4}$ ③ $\frac{49}{2}$ ④ $\frac{105}{4}$ ⑤ 28



$\dfrac{\frac{36}{\sqrt{7}}}{\cancel{\sin\theta}\ \frac{2}{\sqrt{7}}}=2R$

20. $\angle A>\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{AB}:\overline{AC}=\sqrt{2}:1$, $\overline{AH}=2$이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는? [4점][2024년 9월 공통10]

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7



$A=\sqrt{50}$

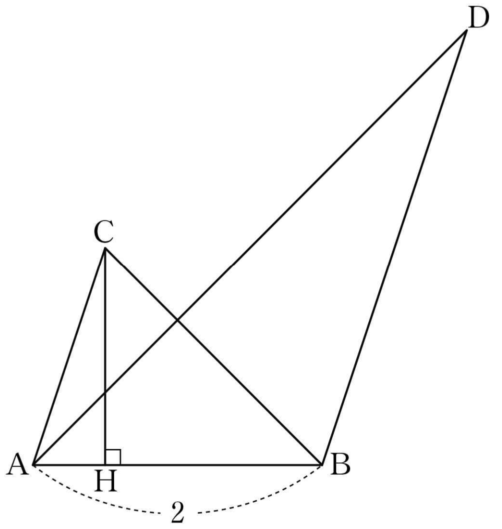
$\sin\circ=\frac{2}{\sqrt{2}K}$

$K=2\underset{\sqrt{50}}{\cancel{R}}\sin\circ$

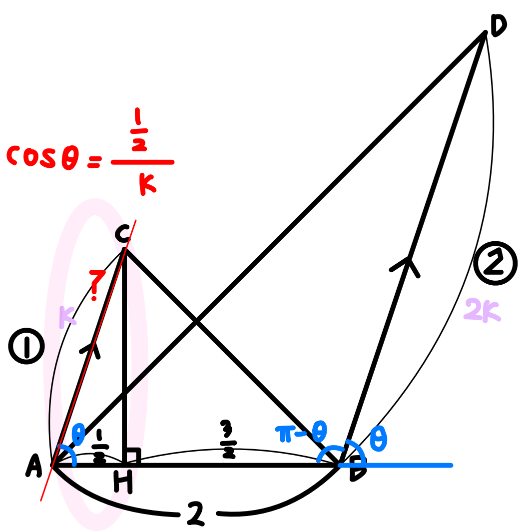
STEP 2　Hills

동의각, 엇각

21. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle \mathrm{CAB})=51$이다. $\overline{AC}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle \mathrm{CAB}<\frac{\pi}{2}$) [4점][2021년 3월 21]



$4(R^2-r^2)\sin^2\underbrace{\angle CAB}_{\theta}=51=\overline{AD}^2-\overline{BC}^2$

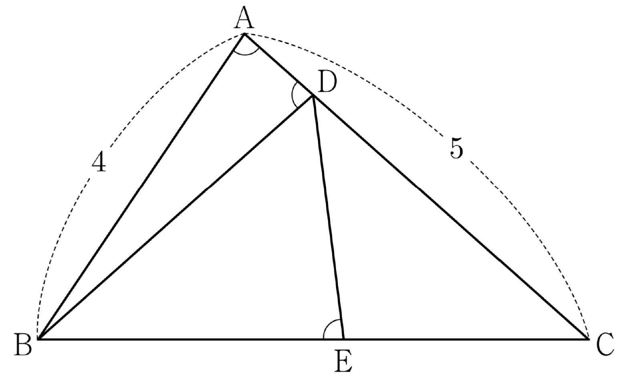
$4r^2\sin^2\theta=(2r\sin\theta)^2=\overline{BC}^2$

$4R^2\underbrace{\sin^2\theta}_{\sin^2(\pi-\theta)}=\overline{AD}^2$

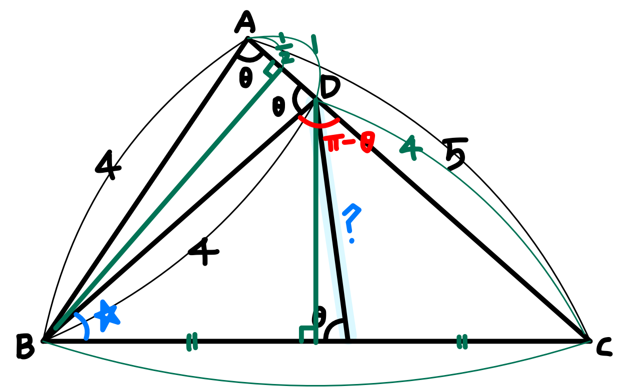
$=2^2+(2k)^2-2\times2\times2k\times\cos(\pi-\theta)$

$=2^2+k^2-2\times2\times k\times\cos\theta$

22. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle \mathrm{BAC})=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여 $\angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{BDA}=\angle \mathrm{BED}$일 때, 선분 DE의 길이는? [4점][2021년 6월 12]



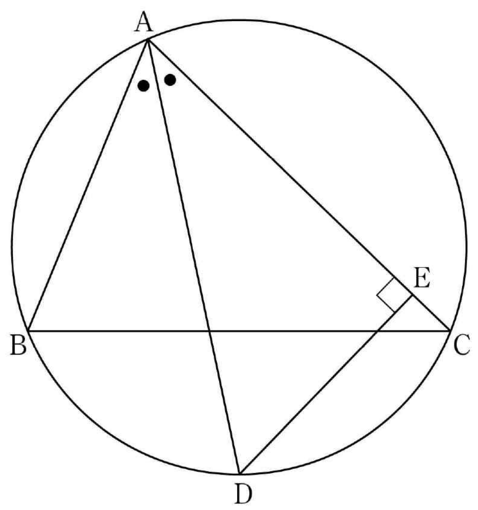
① $\frac{7}{3}$　② $\frac{5}{2}$　③ $\frac{8}{3}$　④ $\frac{17}{6}$　⑤ 3

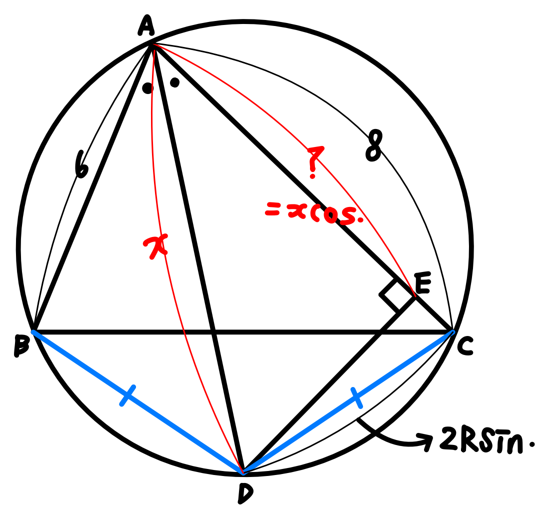


① $\frac{4}{\sin\theta}$ $\frac{\sqrt{63}}{8}$ $=\frac{?}{\boxed{\sin★}}$

② $\overline{BC}^2=32+32\times\frac{1}{8}=36$

23. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$인 예각삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오. [4점][2021년 10월 21]





$(2R\sin\cdot)^2 = 64 + \cancel{\overline{AD}^2}\ \cancel{x^2} - 2\times 8\times x\times \cos\cdot$

$= 36 + \cancel{x^2} - 2\times 6\times \boxed{x\times\cos\cdot}$

24. 길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{BC}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.) [4점][2022년 7월 공통14]

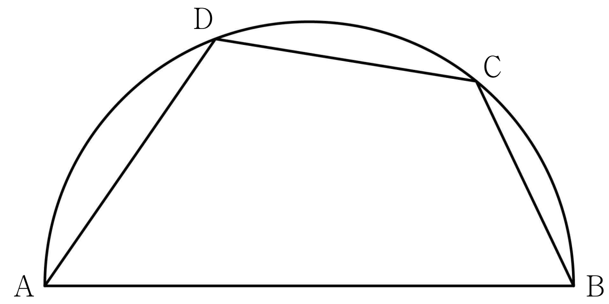
[보 기]

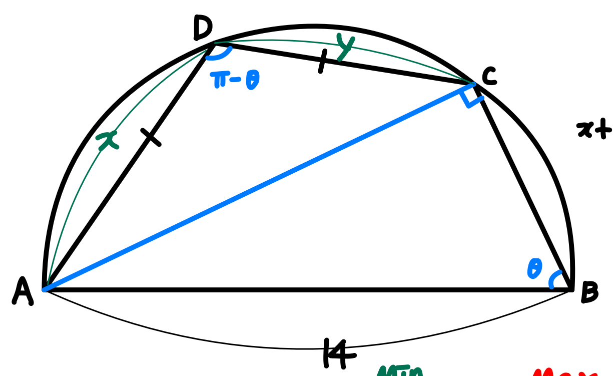
ㄱ. $\sin(\angle \mathrm{CBA})=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ. $\overline{CD}=7$일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ





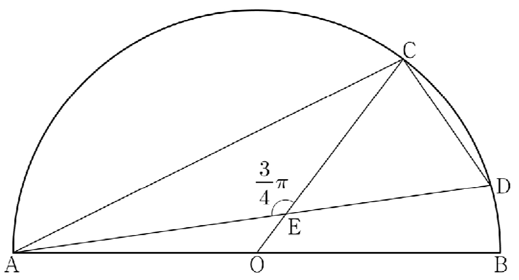
$x+\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{1}$
$=2$

Min $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ Max

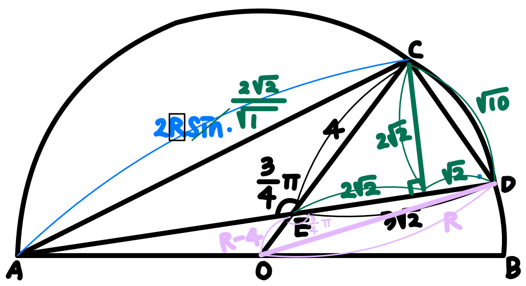
ㄷ. xy : Max

= → $x=y$

25. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고, $\overline{CE}=4$, $\overline{ED}=3\sqrt{2}$, $\angle CEA=\frac{3}{4}\pi$이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은? [4점][2022년 9월 공통 13]



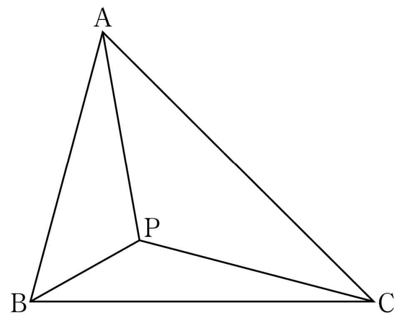
① $6\sqrt{10}$　② $10\sqrt{5}$　③ $16\sqrt{2}$　④ $12\sqrt{5}$　⑤ $20\sqrt{2}$



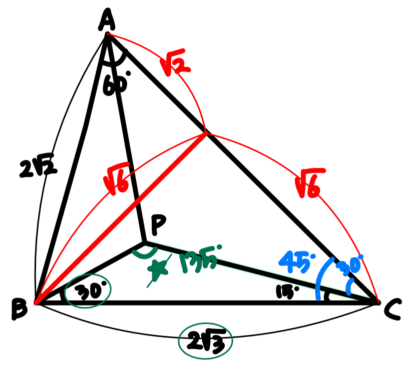
△ACD
내접 ⟶ 사인법칙

$R^2 = (R-4)^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2(R-4)\,3\sqrt{2} \times \cos\frac{3}{4}\pi$

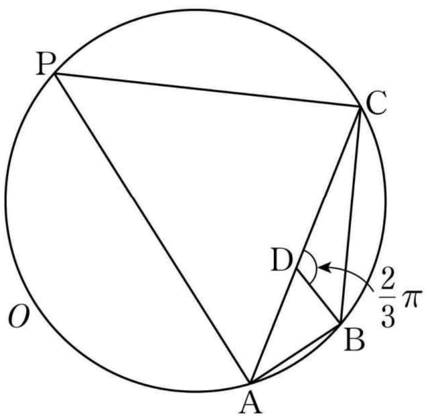
26. 그림과 같이 $\angle BAC=60°$, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC=30°$, $\angle PCB=15°$일 때, 삼각형 APC의 넓이는? [4점][2023년 3월 공통11]



① $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$　② $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$　③ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$　④ $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$　⑤ $2+\sqrt{3}$

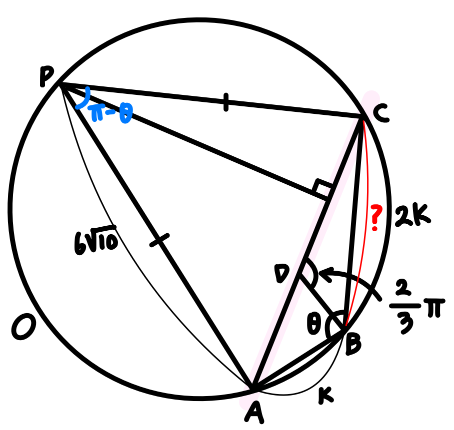


27. 그림과 같이 $2\overline{AB}=\overline{BC}$, $\cos(\angle ABC)=-\frac{5}{8}$ 인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{QA}=6\sqrt{10}$ 이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle CDB=\frac{2}{3}\pi$일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는? [4점][2024년 3월 공통13]



① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$
③ $3\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{3}$
⑤ $4\sqrt{6}$

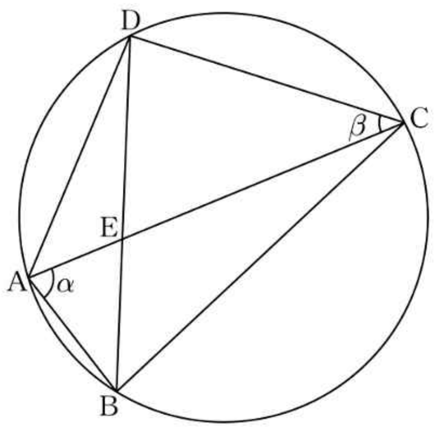
$\boxed{\cos\theta = -\frac{5}{8}}$



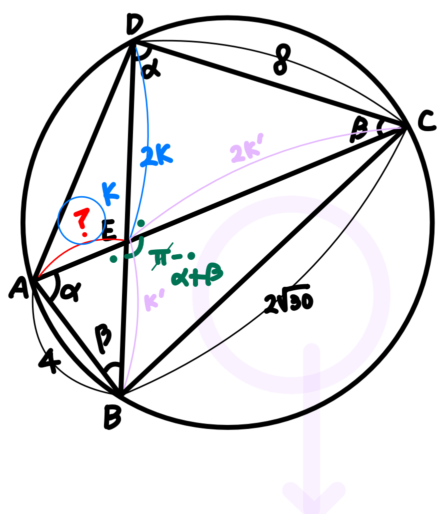
$\frac{?^{\,2K}}{\sin\frac{2}{3}\pi} = 2R$

$\overline{AC}^2 = 720 + 720 \times \frac{5}{8}$

28. 그림과 같이 한 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2\sqrt{30}$, $\overline{CD}=8$이다. $\angle BAC=\alpha$, $\angle ACD=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{12}$ 이다. 두 선분 AC와 BD의 교점을 E라 할 때, 선분 AE의 길이는?
$\left(단,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점][2024년 10월 공통13]



① $\sqrt{6}$ ② $\frac{\sqrt{26}}{2}$
③ $\sqrt{7}$ ④ $\frac{\sqrt{30}}{2}$
⑤ $2\sqrt{2}$



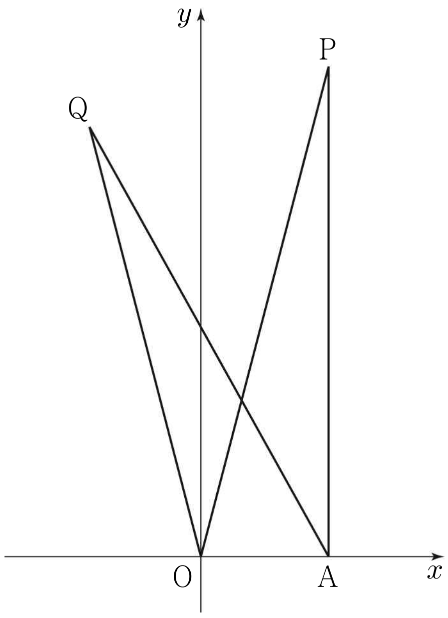
cos $\longrightarrow$ K'

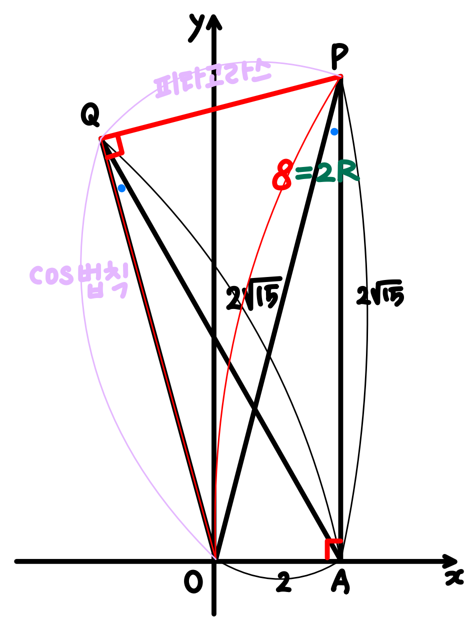
STEP 3 **Mountains**

29. 좌표평면 위의 두 점 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AP} = \overline{AQ} = 2\sqrt{15}$이고 $\overline{OP} > \overline{OQ}$이다. (나) $\cos(\angle OPA) = \cos(\angle OQA) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점][2023년 4월 공통21]

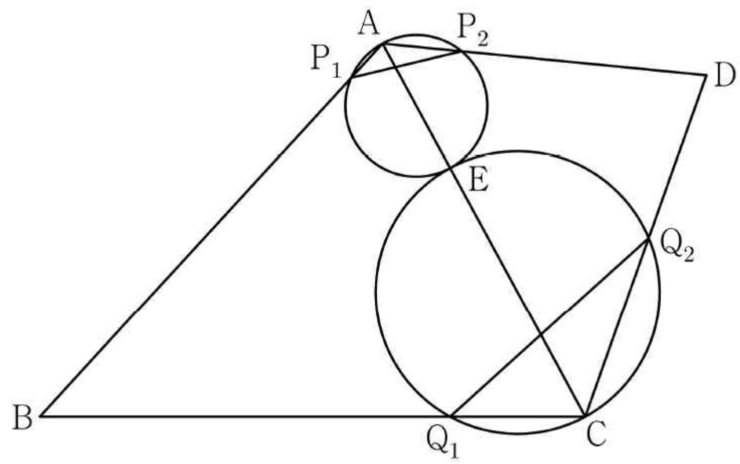




$\cos\cdot = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

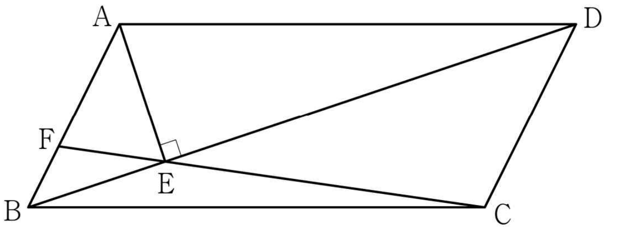
30. 그림과 같이

$\overline{BC} = 3$, $\overline{CD} = 2$, $\cos(\angle BCD) = -\dfrac{1}{3}$, $\angle DAB > \dfrac{\pi}{2}$인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AE를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자. $\overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2} = 3 : 5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB} + \overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB} > \overline{AD}$) [4점][2023년 6월 공통13]



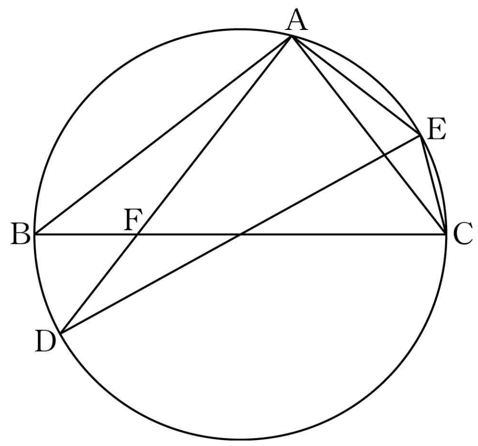
① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$
③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$
⑤ 5

31. 그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자. $\cos(\angle\mathrm{AFC})=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{\mathrm{EC}}=10$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 삼각형 AFE의 넓이는? [4점][2023년 7월 공통13]

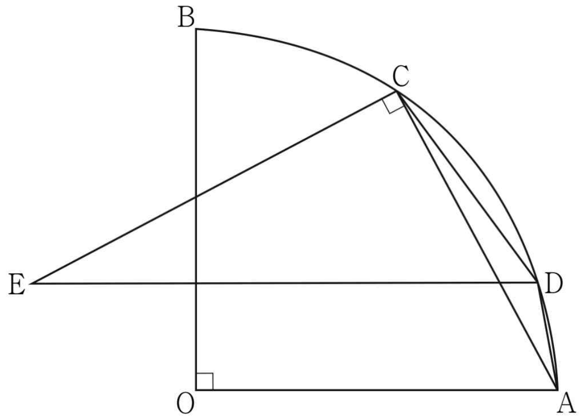


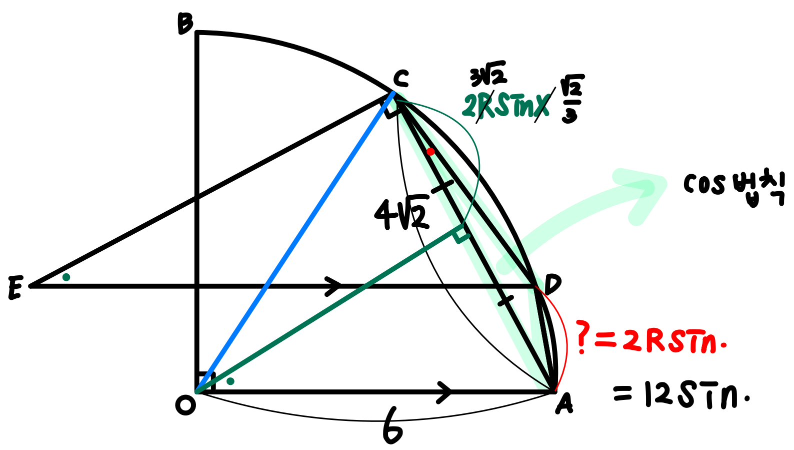
① $\frac{20}{3}$
② 7
③ $\frac{22}{3}$
④ $\frac{23}{3}$
⑤ 8

32. 그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}=4$, $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{CE}}$, $\sin(\angle\mathrm{CAE})=\frac{1}{4}$이다. $\overline{\mathrm{AF}}=k$일 때, k^2의 값을 구하시오. [4점][2023년 10월 공통21]

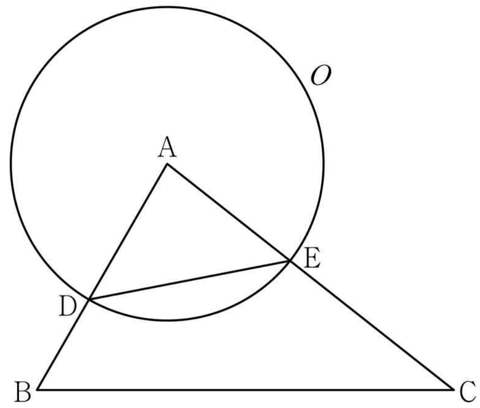


33. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위에 점 C를 $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{2}$가 되도록 잡는다. 호 AC 위의 한 점 D에 대하여 점 D를 지나고 선분 OA에 평행한 직선과 점 C를 지나고 선분 AC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 CED의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{AD}}=p+q\sqrt{7}$을 만족시키는 두 유리수 p, q에 대하여 $9\times|p\times q|$의 값을 구하시오. (단, 점 D는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점][2024년 5월 공통21]

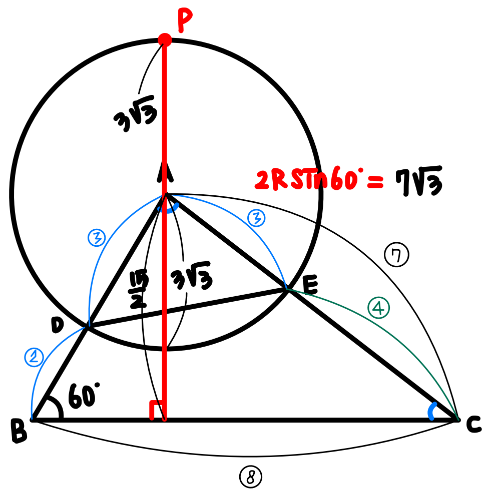




34. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:2$인 점 D를 잡고, 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원을 O, 원 O와 선분 AC가 만나는 점을 E라 하자. $\sin A:\sin C=8:5$이고, 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9:35$이다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AC}}$) [4점][2025학년도 수능 공통14]



① $18+15\sqrt{3}$
② $24+20\sqrt{3}$
③ $30+25\sqrt{3}$
④ $36+30\sqrt{3}$
⑤ $42+35\sqrt{3}$



△ABC 의 R=7

SinA : SinC = 8 : 5 $\quad \frac{8\cancel{\mathrm{Sin}C}}{\mathrm{Sin}A}=\frac{5\cancel{\mathrm{Sin}A}}{\mathrm{Sin}C}$

△ADE : △ABC = 9 : 35

$\frac{1}{2}\cancel{\mathrm{Sin}A}$

⑨

$\cos B=\frac{25+64-49}{2\times5\times8}$

1. ④

사인법칙에 의해 $\dfrac{5}{\sin\theta}=2\times4$

$\sin\theta=\dfrac{5}{8}$

2. ④

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{4}r,\ \overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{3}r$

삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}r\times\dfrac{1}{3}r\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}r^2=4\sqrt{3},\ r=8$

따라서 호의 길이는 $8\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{8}{3}\pi$

3. ⑤

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{6^2+6^2-\{\sqrt{15}\}^2}{2\times6\times6}=\dfrac{57}{72}$

이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\cos A$

$=6^2+10^2-2\times6\times10\times\dfrac{57}{72}$

$=36+100-95=41$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{41}$

4. ②

$\overline{\mathrm{AB}}=3a,\ \overline{\mathrm{AC}}=a$라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}^2=9a^2+a^2-2\cdot\ 3a\cdot\ a\cos\dfrac{\pi}{3}=7a^2$

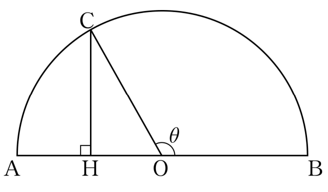
$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{7}a$

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{7}a}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{7}a}{\sqrt{3}}=2\times7$

$a=\sqrt{21}=\overline{\mathrm{AC}}$

5. 27

[출제의도] 호도법을 이해하여 주어진 도형에서 선분의 길이를 구한다.



반원의 중심을 O라 하면 반원의 지름의 길이가 12이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=6$이다.

$\angle\mathrm{COB}=\theta$ 라 하면 호 BC의 길이가 4π이므로

$6\times\theta=4\pi,\ \theta=\dfrac{2}{3}\pi$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\mathrm{COH}=\pi-\theta=\dfrac{\pi}{3}$

삼각형 CHO는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{OC}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{OC}}\times\sin\dfrac{\pi}{3}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{CH}}^2=(3\sqrt{3})^2=27$

6. ②

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 값을 구한다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이므로 사인법칙에 의해

$\dfrac{10}{\sin C}=2\times3\sqrt{5},\ \sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로

$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$에서 $\dfrac{a^2+b^2-\dfrac{2}{3}ab}{ab}=\dfrac{4}{3}$

$3a^2+3b^2-2ab=4ab,\ 3(a-b)^2=0$이므로 $a=b$

코사인법칙에 의해

$10^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+a^2-2a^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}a^2,$

$100=\dfrac{2}{3}a^2,\ a^2=150$

따라서 $ab=a^2=150$

7. 63

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이 구하는 문제를 해결한다.

$\angle\mathrm{BAD}$와 $\angle\mathrm{BCD}$는 같은 호에 대한 원주각이므로 그 크기가 같다.

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCD}=\theta,\ \overline{\mathrm{AD}}=a,\ \overline{\mathrm{CB}}=b$라 하면

삼각형 ABD의 넓이 S_1은

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times6\times a\times\sin\theta=3a\sin\theta$

삼각형 CBD의 넓이 S_2는

$S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times b\times4\times\sin\theta=2b\sin\theta$

$S_1:S_2=9:5$이므로 $3a:2b=9:5$

$a:b=6:5$이므로 $a=6k,\ b=5k\,(k>0)$라고 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{AC}}^2=6^2+(5k)^2-2\times6\times5k\times\cos\alpha$ …… ㉠

$\angle\mathrm{ABC}$와 $\angle\mathrm{ADC}$는 같은 호에 대한 원주각이므로

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}=\alpha$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=(6k)^2+4^2-2\times6k\times4\times\cos\alpha$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$11k^2+9k-20=0,\ (11k+20)(k-1)=0$

$k>0$이므로 $k=1$이고 $a=6k=6$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ADC 의 넓이 S는

$S = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \sin\alpha = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = 3\sqrt{7}$

따라서 $S^2 = (3\sqrt{7})^2 = 63$

8. ③

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

$\overline{BC} = 2\sqrt{5}$, $\overline{OB} = \overline{OC} = \sqrt{10}$ 이므로 삼각형 OBC 는

직각이등변삼각형이고 $\angle \mathrm{BOC} = \frac{\pi}{2}$ 이다.

$\angle \mathrm{AOB} = \alpha$, $\angle \mathrm{AOC} = \beta$라 하면

두 삼각형 OAB, OCA 의 넓이 S_1, S_2 는 각각

$S_1 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{10})^2 \times \sin\alpha = 5\sin\alpha$

$S_2 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{10})^2 \times \sin\beta = 5\sin\beta$

주어진 조건에서 $3S_1 = 4S_2$이므로

$\sin\alpha = \frac{4}{3}\sin\beta$

$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ 이므로 $\beta = \frac{3}{2}\pi - \alpha$

$\sin\alpha = \frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\frac{4}{3}\cos\alpha$ …… ㉠

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 에서 $\frac{16}{9}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$

$\sin\alpha > 0$이므로 ㉠에서 $\cos\alpha < 0$

따라서 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

코사인법칙에 의하여 구하는 선분 AB 의 길이는

$\overline{AB} = \sqrt{(\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 - 2 \times \overline{OA} \times \overline{OB}\cos\alpha}$

$= \sqrt{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2(\sqrt{10})^2 \times \left(-\frac{3}{5}\right)}$

$= 4\sqrt{2}$

9. ①

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면

원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$이므로

$R^2\pi = \frac{49}{3}\pi$, $R = \frac{7}{3}\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2R$, $\overline{BC} = 2 \times \frac{7}{3}\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = a$라 하면 코사인법칙에 의해

$7^2 = a^2 + 3^2 - 2 \times a \times 3 \times \cos\frac{\pi}{3}$

$a^2 = 3a - 40 = 0$, $(a-8)(a+5) = 0$

$a > 0$이므로 $a = 8$

$\overline{AC} = 8$이고 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$\cos(\angle \mathrm{CBA}) = \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 3 \times 7} = -\frac{1}{7}$

이므로 $\frac{\pi}{2} < \angle \mathrm{CBA} < \pi$가 되어 삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

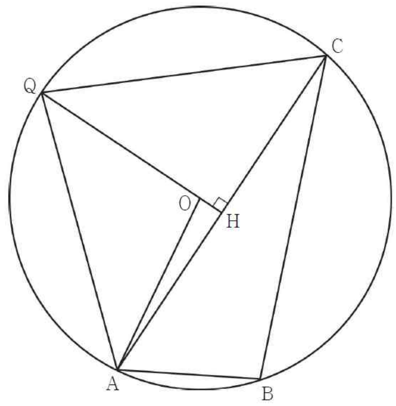
삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q라 하면

점 Q는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선

AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이다.

그림과 같이 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 원

C의 중심 O는 선분 QH 위에 있다.



직각삼각형 AHO에서

$\overline{OH} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 4^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{QH} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$이므로 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2} \times 8 \times \frac{8}{3}\sqrt{3} = \frac{32}{3}\sqrt{3}$

10. ①

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

주어진 원이 삼각형 BCD 의 외접원이고 반지름의 길이가 r이므로

사인법칙에 의하여

$\overline{CD} = 2r\sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$, $\overline{BC} = 2r\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,r$

삼각형 BCD 에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{3}r)^2 = (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 - 2 \times \sqrt{2} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right) \times \cos\frac{\pi}{3}$

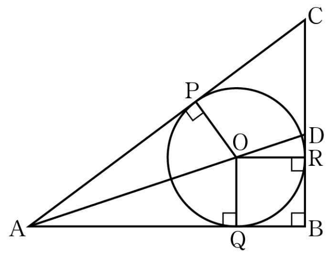
이 식을 정리하면 $5r^2 + 2\sqrt{6}r - 6 = 0$

그러므로 $r = \frac{-\sqrt{6} \pm 6}{5}$

따라서 $r > 0$이므로 $r = \frac{6 - \sqrt{6}}{5}$

11. ①

[출제의도] 사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 넓이를 구한다.



삼각형 ABC 에 내접하는 원이 세 선분 CA, AB, BC 와 만나는 점을 각각 P, Q, R 라 하자.

$\overline{OQ}=\overline{OR}=3$ 이므로 $\overline{DR}=\overline{DB}-\overline{RB}=1$

$\overline{DO}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 이므로

$\sin(\angle DOR)=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

삼각형 DOR 와 삼각형 OAQ 는 닮음비가 $1:3$ 이므로

$\overline{AQ}=3\times\overline{OR}=9$

이때 점 O 가 삼각형 ABC 의 내심이므로

$\overline{PA}=\overline{AQ}=9$, $\angle CAD=\angle DAB$

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$, $12:(9+\overline{CP})=4:(\overline{CR}-1)$

$9+\overline{CP}=3(\overline{CR}-1)$

이때 $\overline{CP}=\overline{CR}$ 이므로 $\overline{CR}=6$, 즉 $\overline{CD}=5$

직선 OR 와 직선 AB 가 평행하므로

$\angle DAB=\angle DOR$, 즉 $\angle CAD=\angle DOR$

삼각형 ADC 의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $2R=\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=5\sqrt{10}$

$R=\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$ 이므로 삼각형 ADC 의 외접원의 넓이는 $\dfrac{125}{2}\pi$이다.

12. ②

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 도형의 성질을 추론한다.

$\angle ABC=\theta$ 라 하자.

ㄱ. 삼각형 ABC 에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\theta$

이므로 $\overline{AC}^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\dfrac{1}{8}=36$

그러므로 $\overline{AC}=6$ (참)

ㄴ. 호 EA 에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로 $\angle ACE=\angle ABE$

호 CE 에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로 $\angle EAC=\angle EBC$

한편, $\angle ABE=\angle EBC$ 이므로 $\angle ACE=\angle EAC$

그러므로 삼각형 EAC 는 $\overline{EA}=\overline{EC}$ 인 이등변삼각형이다. (참)

ㄷ. 삼각형 ABD 에서 $\angle ADE=\angle DAB+\angle ABD$

한편, $\angle DAB=\angle CAD$, $\angle ABD=\angle EBC$

그러므로 $\angle ADE=\angle CAD+\angle EBC$
$=\angle CAD+\angle EAC$
$=\angle EAD$

즉, 삼각형 EAD 는 $\overline{EA}=\overline{ED}$ 인 이등변삼각형이다. 삼각형 EAC 에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{AC}^2=\overline{EA}^2+\overline{EC}^2-2\times\overline{EA}\times\overline{EC}\times\cos(\pi-\theta)$ 이고

ㄴ에서 $\overline{EA}=\overline{EC}$ 이므로

$36=2\times\overline{EA}^2-2\times\overline{EA}^2\times\left(-\dfrac{1}{8}\right)$, $\overline{EA}=4$

그러므로 $\overline{EA}=\overline{ED}$ 에서 $\overline{ED}=4$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

13. 27

[출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로

삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

$\angle BCA=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle CAB=\alpha$라 하면

$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$이고, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\dfrac{8}{9}$이므로

$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{BC}=\overline{AB}\times\sin\alpha$이므로 $\overline{AB}=18$이고, $\overline{AC}=6$

점 D는 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점이므로

$\overline{AD}=10$

삼각형 CAD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DC}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos\alpha=96$

$\overline{DC}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

삼각형 CAD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면,

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{DC}}{\sin\alpha}=2R$에서 $R=3\sqrt{3}$

삼각형 CAD의 외접원의 넓이 $S=27\pi$

따라서 $\dfrac{S}{\pi}=27$

14. ②

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$이므로

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=4\sqrt{7}$

즉,

$\overline{BC}=\sin\dfrac{\pi}{3}\times4\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{7}=2\sqrt{21}$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이도 $2\sqrt{7}$이므로

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=4\sqrt{7}$

즉,

$\overline{BD}=\sin(\angle BCD)\times4\sqrt{7}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\times4\sqrt{7}=8$

한편, $\angle BDC=\pi-\angle BAC=\dfrac{2}{3}\pi$이므로

$\overline{CD}=x$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times8\times\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$x^2+8x-20=0$

$(x-2)(x+10)=0$

$x>0$이므로 $x=2$

즉, $\overline{CD}=2$

따라서 $\overline{BD}+\overline{CD}=8+2=10$

15. ③

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

$\angle BAC=\theta$, $\overline{AC}=a$라 하면 삼각형 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

즉,

$2^2=3^2+a^2-2\times3\times a\times\dfrac{7}{8}$

$a^2-\dfrac{21}{4}a+5=0$

$4a^2-21a+20=0$

$(4a-5)(a-4)=0$

따라서 조건에서 $a>3$이므로 $a=4$

같은 방법으로 삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{MB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AM}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AM}\times\cos\theta$

$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{5}{2}$

이므로

$\overline{MB}=\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

이때 두 삼각형 ABM, DCM은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{MA}\times\overline{MC}=\overline{MB}\times\overline{MD}$

에서

$2\times2=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\overline{MD}$

따라서

$\overline{MD}=\dfrac{8}{\sqrt{10}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

16. ①

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

$\angle BAC=\angle CAD=\theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=25+45-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$=70-30\sqrt{5}\,cos\,\theta$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=49+45-2\times7\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$=94-42\sqrt{5}\,cos\,\theta$

이때 $\angle BAC=\angle CAD$이므로 $\overline{BC}^2=\overline{CD}^2$

$70-30\sqrt{5}\,cos\,\theta=94-42\sqrt{5}\,cos\theta$에서 $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\overline{BC}^2=70-30\sqrt{5}\,cos\,\theta=70-30\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=10$

즉, $\overline{BC}=\sqrt{10}$

한편,

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{1}{5}$ 이므로 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R$

$\dfrac{\sqrt{10}}{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}=2R$

$5\sqrt{2}=2R$

즉, $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

17. ①

$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$ 이고, $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$ 이다.

$\overline{AC}=x$라 하자. 삼각형 ABC 에서 코사인 법칙에 의하여

$(\sqrt{13})^2=3^2+x^2-2\cdot\ 3\cdot\ x\cdot\ \cos\dfrac{\pi}{3}$

$=3^2+x^2-2\cdot\ 3\cdot\ x\cdot\ \dfrac{1}{2}$

이므로 $x=4$ 이다.

$\therefore\ \overline{AC}=4$

삼각형 ABC 의 넓이는 S_1 이다.

$S_1=\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\sin\dfrac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$

삼각형 ACD 의 넓이는 S_2 이고, $S_2=\dfrac{5}{6}S_1$ 이다.

$\therefore\ S_2=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$\angle ADC=\theta$라 하자. $\overline{AD}\times\overline{CD}=9$ 이므로 S_2 는

$\dfrac{1}{2}\times9\times\sin\theta=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$, $\quad\sin\theta=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

$\therefore\ \sin(\angle ADC)=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

삼각형 ACD 의 외접원의 반지름의 길이가 R 이다. 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AC}}{sin\theta}=2R,\qquad\dfrac{4}{\dfrac{5\sqrt{3}}{9}}=2R,\qquad R=\dfrac{18}{5\sqrt{3}}$

이다.

$\therefore\ \dfrac{R}{\sin(\angle ADC)}=\dfrac{\dfrac{18}{5\sqrt{3}}}{\dfrac{5\sqrt{3}}{9}}=\dfrac{54}{25}$

18. ⑤

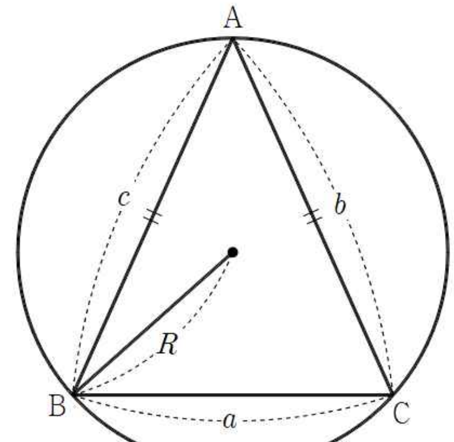
삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 9π 이므로 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $\quad R=3$

조건 (가)에서 $3\sin A=2\sin B$이므로

$\dfrac{3a}{2R}=\dfrac{2b}{2R}\qquad\therefore\ 3a=2b$

조건 (나)에서 $\cos B = \cos C$ 이므로

$\angle B = \angle C \quad \therefore\ b = c$



삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + b^2 - \left(\frac{2}{3}b\right)^2}{2b^2} = \frac{7}{9}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad a = 2 \times 3 \times \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC 의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin A = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}a\right) \times \left(\frac{3}{2}a\right) \times \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{64\sqrt{2}}{9}$$

19. ①

삼각형 ABC의 외접원을 C_1,

삼각형 ADC의 외접원을 C_2라 하자.

원 C_1의 반지름의 길이를 R이라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\frac{36\sqrt{7}}{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = 18 = 2R,\ R = 9$$

원 C_2에서 $\angle AO'D$는 호 AD의 중심각,

$\angle ACD$는 호 AD의 원주각이므로

$$\angle AO'D = 2\angle ACD = \frac{2}{3}\pi$$

이등변삼각형 $O'AD$에서 $\angle AO'D = \frac{2}{3}\pi$이므로

$$\angle DAO' = \frac{\pi}{6}$$

$\overline{OA} = R = 9,\ \overline{AO'} = 5\sqrt{3}$

$\angle OAO' = \frac{\pi}{6}$이므로

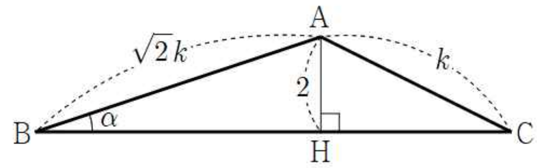
삼각형 AOO'에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{OO'}^2 = 9^2 + (5\sqrt{3})^2 - 2 \times 9 \times 5\sqrt{3} \times \cos\frac{\pi}{6}$$

$$= 81 + 75 - 135 = 21$$

따라서 $\overline{OO'}^2 = 21$

20. ①



삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 50π 이므로 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $R = 5\sqrt{2}$

$\overline{AB} = \sqrt{2}k,\ \overline{AC} = k\ (k > 0)$으로 놓고 $\angle ABC = \alpha$라 하면 삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin\alpha} = 2R = 10\sqrt{2}, \quad \sin\alpha = \frac{k}{10\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

직각삼각형 ABH 에서 $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}k}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$$\frac{k}{10\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}k}, \quad k^2 = 20$$

직각삼각형 ABH 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{2k^2 - 4} = 6$$

21. 15

[출제의도] 사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

$\overline{AC} = k$라 하면 $\overline{BD} = 2k$ 이고

$\overline{AH} : \overline{HB} = 1 : 3$ 이므로 $\overline{AH} = \frac{1}{2}$

$\angle CAB = \theta$라 할 때, 두 삼각형 ABC, ABD 에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 2r,\ \frac{\overline{AD}}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{\overline{AD}}{\sin\theta} = 2R$$

즉, $\overline{BC} = 2r\sin\theta,\ \overline{AD} = 2R\sin\theta$

$4(R^2 - r^2) \times \sin^2\theta = (2R\sin\theta)^2 - (2r\sin\theta)^2$이므로

두 식을 $(2R\sin\theta)^2 - (2r\sin\theta)^2 = 51$ 에 대입하면

$\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51$ $\cdots\cdots$ ㉠

삼각형 AHC 에서 $\cos\theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{CA}} = \frac{1}{2k}$ 이므로

두 삼각형 ABC, ABD 에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\theta$

$= 4 + k^2 - 2 \times 2 \times k \times \cos\theta = k^2 + 2$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BD} \times \cos(\pi - \theta)$

$= 4 + 4k^2 + 2 \times 2 \times 2k \times \cos\theta = 4k^2 + 8$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 $\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 3k^2 + 6 = 51$

즉, $k^2 = 15$

따라서 $\overline{AC}^2 = 15$

22. ③

[출제의도] 코사인법칙과 삼각비를 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

삼각형 ABD에서

$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{BDA}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로

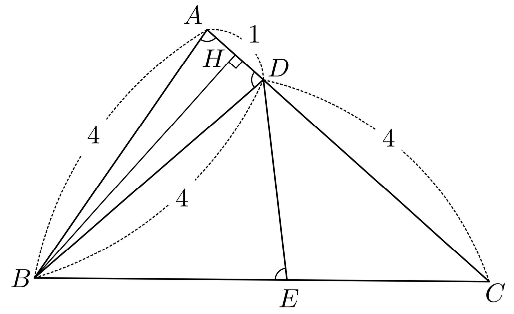
$\overline{\mathrm{BD}}=4$ …… ㉠

이때 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos(\angle \mathrm{BAC})=4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

그러므로

$\overline{\mathrm{AD}}=1$



삼각형 BCD는 $\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{DC}}=4$인 이등변삼각형이다.

점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H′, $\overline{\mathrm{DE}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{DH'}}=x\sin(\angle \mathrm{H'ED})=x\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{63}}{8}x$ …… ㉡

한편, 삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$

$=-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos(\angle BAC)$

$=4^2+5^2-2\times4\times5\times\frac{1}{8}$

$=36$

이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=6$

이때, $\overline{\mathrm{BH'}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=3$ …… ㉢

직각삼각형 DBH′에서 ㉠, ㉡, ㉢을 이용하면

$4^2=\left(\frac{\sqrt{63}}{8}x\right)^2+3^2$

$\frac{63}{64}x^2=7$

$x^2=\frac{64}{9}$

$\overline{\mathrm{DE}}=x$이므로 $x>0$

따라서 $\overline{\mathrm{DE}}=\frac{8}{3}$

23. 84

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

호 BD와 호 DC에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle \mathrm{CBD}=\angle \mathrm{CAD}=\angle \mathrm{DAB}=\angle \mathrm{DCB}$이다.

즉, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{DC}}$

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{DC}}=a$, $\overline{\mathrm{AD}}=b$, $\angle \mathrm{CAD}=\theta$라 하면

$\angle \mathrm{DAB}=\theta$이고 $\overline{\mathrm{BD}}^2=\overline{\mathrm{DC}}^2$이므로

삼각형 DAB와 삼각형 CAD에 각각 코사인법칙을 적용하면

$6^2+b^2-2\times6\times b\times\cos\theta=b^2+8^2-2\times b\times8\times\cos\theta$

$4b\cos\theta=28$ 이므로

직각삼각형 ADE에서 $k=b\cos\theta=7$

따라서 $12k=84$

24. ⑤

[출제의도] 코사인법칙을 활용하여 추론하기

ㄱ. $\angle \mathrm{BCA}=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\cos(\angle \mathrm{CBA})=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{3}{7}$

$\sin(\angle \mathrm{CBA})=\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$ (참)

ㄴ. $\angle \mathrm{CBA}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\angle \mathrm{ADC}=\pi-\theta$

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{AB}\times\sin\theta=14\times\frac{2\sqrt{10}}{7}=4\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{AD}}=k\ (k>0)$ 이라 하면

삼각형 ACD 에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=k^2+7^2-2\times k\times7\times\cos(\pi-\theta)$

$=k^2+49+14k\cos\theta$

$=k^2+6k+49$

$k^2+6k-111=0$ 이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=-3+\sqrt{9+111}=-3+2\sqrt{30}$ (참)

ㄷ. 삼각형 ACD 의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD 의 넓이가 최대이므로 점 D 는 선분 AC 의 수직이등분선이 호 AC 와 만나는 점이다. 그러므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$

$\overline{\mathrm{AD}}=x\ (x>0)$ 이라 하면

삼각형 ACD 에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos(\pi-\theta)$

$=2x^2+2x^2\times\frac{3}{7}=\frac{20}{7}x^2$

$x^2=56$ 이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{14}$

사각형 ABCD 의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}$

$=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{14})^2\times\frac{2\sqrt{10}}{7}+\frac{1}{2}\times4\sqrt{10}\times6$

$=8\sqrt{10}+12\sqrt{10}=20\sqrt{10}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. ⑤

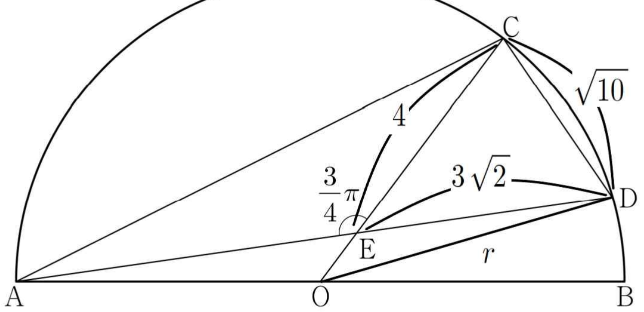
삼각형 CDE에서 코사인 법칙에 따라

$\overline{\mathrm{CD}}^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\cos(\angle CED)$

$=16+18-24\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=10,$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}$

원의 반지름을 r이라 할 때,



삼각형 OED에서 코사인 법칙에 따라

$r^2=(r-4)^2+(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times(r-4)\times\cos\frac{3}{4}\pi$

$r^2=r^2-8r+16+18+6(r-4)$, $10-2r=0$, $r=5$

삼각형 ACD에서 $\angle$ CAD $=\theta$라 할 때, 사인법칙에 따라

$\frac{\overline{CD}}{\sin\theta}=2r$, $\frac{\sqrt{10}}{\sin\theta}=10$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$

삼각형 AEC에서

$\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{4}{\sin\theta}$, $\overline{AC}=\frac{4}{\frac{\sqrt{10}}{10}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{40}{2\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$

$\therefore$ $\overline{AC}\times\overline{CD}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

26. ③

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

삼각형 PBC에서

$\angle$ BPC $=180°-(30°+15°)=135°$

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin135°}=\frac{\overline{PC}}{\sin30°}$이므로

$\overline{PC}=2\sqrt{3}\times\frac{\sin30°}{\sin135°}=\sqrt{6}$

$\overline{AC}=b$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2=(2\sqrt{2})^2+b^2-2\times2\sqrt{2}\times b\times\cos60°$

$b^2-2\sqrt{2}b-4=0$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin60°}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin C}$이므로 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$

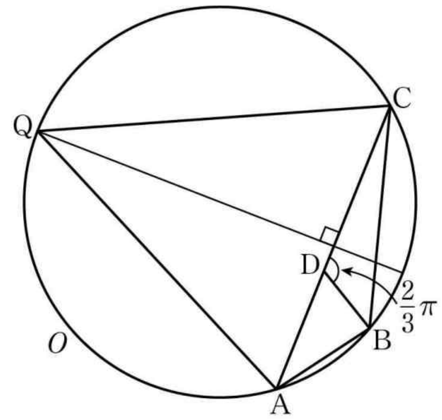
$A=60°$에서 $C<120°$이므로 $C=45°$

$\angle$ PCA $=45°-15°=30°$이므로 삼각형 APC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\sin30°=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

27. ②

점 B를 포함하지 않는 호 AC와 선분 AC의 수직이등분선의 교점을 R라 하자. P=R일 때, 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되므로 Q=R이다.



$\cos(\angle\text{ ABC})=-\frac{5}{8}$ 이므로

$\cos(\angle\text{ CQA})=\cos(\pi-\angle\text{ ABC})=-\cos(\angle\text{ ABC})=\frac{5}{8}$

$\overline{QA}=\overline{QC}=6\sqrt{10}$ 이므로

삼각형 QAC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{QA}^2+\overline{QC}^2-2\times\overline{QA}\times\overline{QC}\times\cos(\angle\text{ CQA})$

$=(6\sqrt{10})^2+(6\sqrt{10})^2-2\times6\sqrt{10}\times6\sqrt{10}\times\frac{5}{8}=270$

$\overline{AB}=a$ $(a>0)$이라 하면 $2\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{BC}=2a$이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle\text{ ABC})$

$=a^2+(2a)^2-2\times a\times2a\times\left(-\frac{5}{8}\right)=\frac{15}{2}a^2$

$\frac{15}{2}a^2=270$에서 $a=6$

삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 CDB에서 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle\text{ CDB})}=\frac{2a}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8\sqrt{3}$

따라서 $R=4\sqrt{3}$

28. ⑤

삼각형 ABE와 삼각형 DCE는 서로 닮음이고

$\overline{AB}:\overline{DC}=1:2$이므로 $\overline{BE}:\overline{CE}=1:2$이다.

삼각형 BEC에서 $\overline{BE}=k$ $(k>0)$이라 하면 $\overline{CE}=2k$

원주각의 성질에 의하여 $\angle$ BDC $=\angle$ BAC $=\alpha$이므로

$\angle$ BEC $=\alpha+\beta$

삼각형 BEC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{30})^2=k^2+4k^2-2\times k\times2k\times\left(-\frac{5}{12}\right)$, $k^2=18$

$k>0$이므로 $k=3\sqrt{2}$, $\overline{BE}=3\sqrt{2}$

$\overline{AE}=t$ $(t>0)$이라 하면 삼각형 ABE에서

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $t^2+4^2>(3\sqrt{2})^2$, $t>\sqrt{2}$

$\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{12}$

삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=t^2+(3\sqrt{2})^2-2\times t\times3\sqrt{2}\times\frac{5}{12}$

$2t^2-5\sqrt{2}t+4=0$

$(2t-\sqrt{2})(t-2\sqrt{2})=0$

$t > \sqrt{2}$ 이므로 $t = 2\sqrt{2}$

따라서 구하는 선분 AE의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

29. 22

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{OP}} = k_1$, $\overline{\mathrm{OQ}} = k_2$라 하자.

삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여

$$2^2 = k_1^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2\times k_1 \times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 OAQ에서 코사인법칙에 의하여

$$2^2 = k_2^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2\times k_2 \times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$

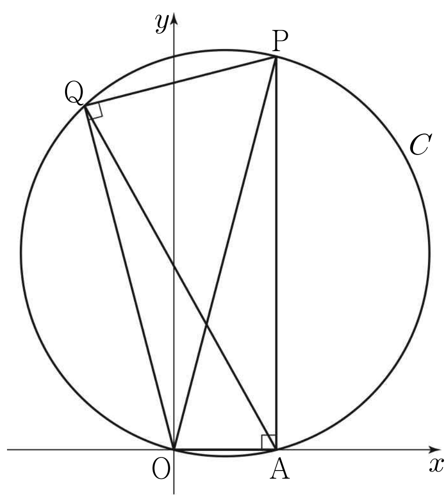
이므로 두 실수 k_1, k_2는 이차방정식

$$2^2 = x^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2\times x \times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$

의 서로 다른 두 실근이다.

$x^2 - 15x + 56 = (x-7)(x-8) = 0$

에서 $k_1 > k_2$이므로 $k_1 = 8$, $k_2 = 7$



$\cos(\angle\,\mathrm{OPA}) = \cos(\angle\,\mathrm{OQA})$ 이므로 $\angle\,\mathrm{OPA} = \angle\,\mathrm{OQA}$

삼각형 OAP의 외접원을 C라 하면

두 점 P, Q의 y좌표가 양수이므로 점 Q도 원 C 위의 점이다.

$\sin(\angle\,\mathrm{OPA}) = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}$이므로

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 OAP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\sin(\angle\,\mathrm{OPA})} = 8 = 2R$$

그러므로 선분 OP는 원 C의 지름이다.

$\angle\,\mathrm{PAO} = \angle\,\mathrm{OQP} = \frac{\pi}{2}$ 이므로

직각삼각형 OPQ에서 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15}$

사각형 OAPQ의 넓이는

두 직각삼각형 OAP, OPQ의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{15} + \frac{1}{2}\times 7\times\sqrt{15} = \frac{11}{2}\sqrt{15}$$

에서 $p = 2$, $q = 11$

따라서 $p\times q = 22$

30. ①

[출제의도] 사인법칙, 코사인법칙과 삼각형의 넓이를 이용하여 조건을 만족시키는 사각형의 변의 길이를 구할 수 있는가

$\angle\,\mathrm{BCD} = \alpha$, $\angle\,\mathrm{DAB} = \beta$ $\left(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$,

$\overline{\mathrm{AB}} = a$, $\overline{\mathrm{AD}} = b$ 라 하자.

삼각형 BCD에서

$\overline{\mathrm{BC}} = 3$, $\overline{\mathrm{CD}} = 2$, $\cos(\angle\,\mathrm{BCD}) = -\frac{1}{3}$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BD}}^2 = 9 + 4 - 2\times 3\times 2\times\left(-\frac{1}{3}\right) = 17$$

그러므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = 17$ …… ㉠

한편, 점 E가 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이므로

두 삼각형 $\mathrm{AP_1P_2}$, $\mathrm{CQ_1Q_2}$의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, $2r$로 놓을 수 있다.

이때 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{\sin\beta} = r$, $\frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{\sin\alpha} = 2r$ 이므로

$$\sin\alpha : \sin\beta = \frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{2r} : \frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{r} = \frac{5\sqrt{2}}{2} : 3$$

즉, $\sin\beta = \frac{6\sin\alpha}{5\sqrt{2}}$

이때

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$\sin\beta = \frac{6}{5\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{5}$$

$\cos\beta < 0$ 이므로

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}ab\sin\beta = 2$ 에서

$$\frac{1}{2}ab\times\frac{4}{5} = 2$$

$ab = 5$

㉠에서

$$a^2 + b^2 - 2\times 5\times\left(-\frac{3}{5}\right) = 17$$

$a^2 + b^2 = 11$

따라서

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 11 + 2\times 5 = 21$

이므로

$a + b = \sqrt{21}$

31. ①

$\angle\,\mathrm{AFC} = \alpha$, $\angle\,\mathrm{CDE} = \beta$라 하자.

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 이므로 $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\angle\,\mathrm{ECD} = \angle\,\mathrm{EFB} = \pi - \alpha$

삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{ED}}}{\sin(\pi-\alpha)}=\dfrac{\overline{\mathrm{EC}}}{\sin\beta}=10\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{ED}}=10\sqrt{2}\times\sin\alpha=10\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=6\sqrt{5}$

$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\dfrac{\pi}{4}$

$\overline{\mathrm{CD}}=x$라 하자.

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$180=x^2+100-2\times x\times 10\times\cos(\pi-\alpha)$

$=x^2+100+2\times x\times 10\times\cos\alpha$

$=x^2+2\sqrt{10}x+100$

$x^2+2\sqrt{10}x-80=0$이고 $x>0$이므로

$x=-\sqrt{10}+\sqrt{10+80}=2\sqrt{10}$

$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{CDE}=\dfrac{\pi}{4}$이므로 삼각형 ABE는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{10}$이므로 $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{AE}}=2\sqrt{5}$

두 삼각형 BEF, DEC는 서로 닮음이고 닮음비가 $1:3$이다.

$\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{2}{3}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$

따라서 삼각형 AFE의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{10}}{3}\times 2\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{20}{3}$

32. 6

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

$\angle\mathrm{CAE}=\theta$라 하면 $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=4$이므로

삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin\theta}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CE}}=1$

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{CE}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{FC}}=3$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}$에서 선분 DE도 주어진 원의 지름이므로

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{DAE}=90^\circ$이다.

$\angle\mathrm{BAD}=90^\circ-\angle\mathrm{DAC}=\theta$

삼각형 ABF에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{k}{\sin(\angle\mathrm{ABF})}=\dfrac{1}{\sin\theta}=4$이므로 $\sin(\angle\mathrm{ABF})=\dfrac{k}{4}$

직각삼각형 ABC에서 $\sin(\angle\mathrm{ABC})=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{4}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=4\sin(\angle\mathrm{ABC})=4\times\dfrac{k}{4}=k$

직각삼각형 ABC에서 $\cos(\angle\mathrm{BCA})=\dfrac{k}{4}$ 이므로

삼각형 AFC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{FC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{FC}}\times\cos(\angle\mathrm{FCA})$

$k^2=k^2+3^2-2\times k\times 3\times\dfrac{k}{4}$, $\dfrac{3}{2}k^2=9$

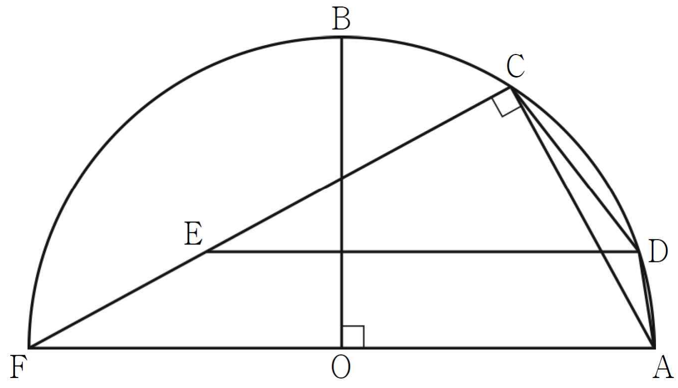
따라서 $k^2=6$

33. 64

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 원을 $\mathcal{C}$라 하고, 원 $\mathcal{C}$와 직선 OA가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 F라 하자. 선분 FA는 원 $\mathcal{C}$의 지름이므로 $\angle\mathrm{FCA}=\dfrac{\pi}{2}$이다. 또한 $\angle\mathrm{ECA}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

세 점 C, E, F는 한 직선 위에 있다.



직선 ED가 직선 OA에 평행하므로

$\sin(\angle\mathrm{DEC})=\sin(\angle\mathrm{AFC})=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

삼각형 CED에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{DEC})}=2\times 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CD}}=4$

사각형 ADCF가 원 $\mathcal{C}$에 내접하므로

$\cos(\angle\mathrm{CDA})=\cos(\pi-\angle\mathrm{AFC})$

$=-\cos(\angle\mathrm{AFC})$

$=-\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{2})^2=4^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times 4\times\overline{\mathrm{AD}}\times\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$

$3\times\overline{\mathrm{AD}}^2+8\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{AD}}-48=0$

$\overline{\mathrm{AD}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{16}{3}-\dfrac{4}{3}\sqrt{7}$

따라서 $p=\dfrac{16}{3}$, $q=-\dfrac{4}{3}$이므로

$9\times|p\times q|=64$

34. ④

주어진 그림에서 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:2$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=3t$ $(t>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{DB}}=2t$, $\overline{\mathrm{AB}}=5t$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}=14$, $\sin A:\sin C=\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{AB}}$

$\sin A:\sin C=8:5$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{AB}}=8:5$에서

$\overline{\mathrm{BC}}=8t$

두 삼각형 ADE, ABC의 넓이의 비가 $9:35$이므로

$\dfrac{1}{2}\times 3t\times\overline{\mathrm{AE}}\times\sin A:\dfrac{1}{2}\times 5t\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin A=9:35$

$3\overline{\mathrm{AE}}:5\overline{\mathrm{AC}}=9:35$, $\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{3}{7}\overline{\mathrm{AC}}$

즉 $\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{AC}}=3:7$이고 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}$이므로

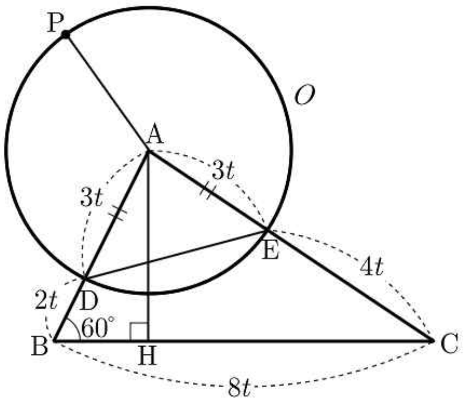
$\overline{\mathrm{AE}}=3t$, $\overline{\mathrm{AC}}=7t$

라 할 수 있다.

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle \mathrm{ABC})=\frac{(5t)^2+(8t)^2-(7t)^2}{2\times 5t\times 8t}=\frac{40t^2}{80t^2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \angle \mathrm{ABC}=60^\circ$



삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이가 7 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle \mathrm{ABC})}=14,\qquad 7t=14\times\sin 60^\circ=7\sqrt{3}$$

즉 $t=\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=8t=8\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=3\sqrt{3}$

이때 점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\sin 60^\circ=5\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15}{2}$$

따라서 원 O 위의 점 P 에 대하여 삼각형 PBC 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{AH}})\times\overline{BC}\le\ \frac{1}{2}\times\left(3\sqrt{3}+\frac{15}{2}\right)\times 8\sqrt{3}$$

$$=36+30\sqrt{3}$$