2017학년도 염화포타슘 모의고사
정답 및 해설

수리 영역

“가”형 정답

1	②	*2*	②	*3*	①	*4*	③	*5*	④
6	③	*7*	④	*8*	⑤	*9*	④	*10*	①
11	⑤	*12*	②	*13*	①	*14*	④	*15*	③
16	②	*17*	⑤	*18*	⑤	*19*	③	*20*	①
21	③	*22*	4	*23*	30	*24*	20	*25*	18
26	16	*27*	100	*28*	690	*29*	644	*30*	24

해설

1. [출제의도] 로그 계산하기
$\log_2 \frac{8}{3} + \log_2 24 = \log_2 64 = 6$

2. [출제의도] 극한 계산하기
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x}{\sin x}$$
$$= \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

3. [출제의도] 분할 계산하기
$S(4,3) = {}_4C_2 = 6$

4. [출제의도] 길이의 최솟값 추론하기
$(1,\ 2,\ 3)$을 y축에 대하여 대칭이동 한 점은 $(-1,\ 2,\ -3)$이므로 $a+b+c=-2$이다.

5. [출제의도] 역함수의 성질 이해하기
$f(x)=2^x$와 $g(x)=\log_2 x$는 역함수이므로 $y=x$에 대칭이고 $y=-x+6$ 또한 $y=x$ 대칭이므로 A와 B는 $y=x$에 대칭이다.
따라서 $\mathrm{B}(4,2)$이므로 $ab=8$이다.

6. [출제의도] 확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
흰 공 1개와 검은 공 1개가 나올 확률은
$$\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$
$\therefore \frac{3}{5}$

7. [출제의도] 정사영의 넓이 구하기
단면의 넓이를 S라고 하면 단면을 밑면을 포함한 평면에 정사영한 것이 밑면과 일치하므로 $S\cos 30^\circ = 9\pi$이다. 따라서 $S=6\sqrt{3}\pi$이다.

8. [출제의도] 삼각함수의 최대, 최소
$f(x)$는 $\sin x=1$에서 최댓값을 가지므로
$a+b=12$
$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{4}a+b=10$
두 식을 연립하면 $a=8,\ b=4$
$f(x)$는 $\sin x=0$에서 최소이므로
최솟값은 4이다.

9. [출제의도] 중복순열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

0은 처음에 올 수 없고 맨 뒷자리에는 홀수인 1, 3만이 올 수 있으므로 경우의 수는
$3\times 4\times 4\times 2=96$이다.

10. [출제의도] 포물선의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
포물선의 초점이 $\mathrm{P}(2,0)$이고 $\overline{\mathrm{AC}}=4\overline{\mathrm{OP}}$이므로 포물선의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{AP}}=8$ 이고
$\frac{1}{8}+\frac{1}{\overline{\mathrm{BP}}}=\frac{1}{2}$, 따라서 $\overline{\mathrm{BP}}=\frac{8}{3}$

11. [출제의도] 벡터의 합 계산하기
$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2$$
$$=|8\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{PE}}+\overrightarrow{\mathrm{PF}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}|^2=|8\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=192$$

12. [출제의도] 원순열에서의 경우의 수 계산하기
서로 다른 7개 영역에 서로 다른 7가지의 색을 칠하는 경우의 수는 7!이다. 이 때, 3방향에 대해서 일치하므로 $\frac{7!}{3}=1680$

13. [출제의도] 미분을 이용하여 접선에 수직인 직선 구하기
$f(x)=\ln x,\ f'(x)=\frac{1}{x}$이다. 따라서 $\mathrm{A}(e,1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{e}$이다.
따라서 $\mathrm{A}(e,1)$을 지나고 $\mathrm{A}(e,1)$에서의 접선 수직인 직선의 방정식은 $y=-e(x-e)+1$
따라서 y절편은 e^2+1

14. [출제의도] 정적분의 정의를 활용한 수학 내적 문제 해결하기
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left\{\frac{(e-1)k}{n}+1\right\}\right]^2\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{e-1}\int_1^e(\ln x)^2dx=\frac{1}{e-1}V$$
($x=\frac{(e-1)k}{n}+1$로 놓고 정적분의 정의를 이용한다.)

15. [출제의도] 정규분포곡선 이해하기
$$h(t)=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}\,dx$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 g(x)\,dx$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)-\mathrm{P}(-\frac{t}{2}\le Z\le\frac{1-t}{2})$$
ㄱ. $h(0)=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1)$
ㄴ. $\mathrm{P}(-\frac{t}{2}\le Z\le\frac{1-t}{2})>0$
$\therefore\ h(t)<\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
ㄷ. $h(t)$가 최소가 되는 때는
$\mathrm{P}(-\frac{t}{2}\le Z\le\frac{1-t}{2})$가 최대가 되는 때
이므로 $t=\frac{1}{2}$

16. [출제의도] 조합으로 구성된 식의 값 추론하기

${}_5C_k={}_5C_{5-k}$ 이므로
$$\sum_{k=0}^{5}({}_5C_k)^2=\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k\times{}_5C_{5-k}$$
$$={}_5C_0\times{}_5C_5+{}_5C_1\times{}_5C_4+\cdots+{}_5C_5\times{}_5C_0$$
이다. 이 때, 서로 다른 두 집합 A, B를
$\{x|x\le \boxed{5}$ 인 자연수$\}$,
$\{x|6\le x\le 10$인 자연수$\}$로 정의하면
${}_5C_0\times{}_5C_5+{}_5C_1\times{}_5C_4+\cdots+{}_5C_5\times{}_5C_0$은
A, B에서 각각 $(0,5)$개, $(1,4)$개 $\cdots$ $(5,0)$개를 뽑는 경우의 수 이므로 $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$에서
$\boxed{5}$ 개를 뽑는
경우의 수와 같다.
따라서, $\sum_{k=0}^{5}({}_5C_k)^2=\boxed{{}_{10}C_5}$

$$\frac{l}{(m+1)(n+1)}=\frac{{}_{10}C_5}{6\times 6}=7$$

17. [출제의도] 평면벡터를 이용한 수학 내적 문제 해결하기
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,1),\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=(x,y),\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,2)$
이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(x-1,y-3)$ 직선 AB와 CD가 평행하므로 $\frac{x-1}{2}=y-3$이다. 이때, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\le 5$이므로 $x^2+y^2\le 25$이다.
$\frac{x-1}{2}=y-3,\ \ x-2y+5=0$이므로 이 직선과 원점 사이의 거리는 $\sqrt{5}$이다.
따라서 점 D가 나타내는 도형은 길이가 $4\sqrt{5}$인 선분이 된다.

18. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
한 칸에 회색을 칠하면 회색이 칠해진 칸의 행과 열에는 검은색을 칠하지 못하므로 나머지 4칸에만 검은색을 칠할 수 있다. 따라서 색을 칠하는 경우의 수는 ${}_9C_1\times{}_4C_2=54$이다.
(회색 ${}_9C_1$, 검은색 ${}_4C_2$, 나머지 칸 흰색)

19. [출제의도] 미적분을 이용하여 수학 내적 문제
$g(x)$가 $f(x)$의 역함수 이므로 $f(g(x))=x$이다.
미분하면 $f'(g(x))g'(x)=1$이다.
$h(x)$가 $\{g(x)\}^2$의 역함수 이므로
$h(\{g(x)\}^2)=x$이다.
미분하면 $2h'(\{g(x)\}^2)g(x)g'(x)=1$이다.
이때 $\{g(x)\}^2=\frac{\pi^2}{36}$인 x의 값을 찾아야한다.
$f(x)$의 정의역이 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$,
치역이 $0\le x\le 1$이므로
$g(x)$의 정의역은 $0\le x\le 1$,
치역은 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$이다.
따라서 $\{g(x)\}^2=\frac{\pi^2}{36}$를 만족하는 x의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $f'(\frac{\pi}{6})g'(\frac{1}{2})=1$

$2h'(\frac{\pi^2}{36})g(\frac{1}{2})g'(\frac{1}{2})=1$이다.

$f'(x)=\cos x$이므로 $f'(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 $h'(\frac{\pi^2}{36})=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{6}{\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$이다.

20. [출제의도] 공간도형의 부피 이해하기
직선 BG는 평면 ABGF에 포함되어 있고
직선 DE는 평면 ADEF에 포함되어 있으므로
두 직선의 교점은 두 평면의 교선인 직선AF 위에 있다.
같은 이유로 직선 AF와 직선 CH의 교점은 직선 DE위에 있고 직선 AF와 직선 DE의 교점은 하나이므로 직선 AF, 직선 DE와 직선 CH는 한 점에서 만난다. 이 점을 P라고 한다.
삼각형 PBD는 정삼각형이고 $\overline{\mathrm{BD}}=2$이므로
$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{2}$이다. ($\because \overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{\sqrt{3}^2-1^2}$)
또한 삼각형 PAB는 삼각형 PFG와 닮음이고
닮음비는 $1:3$이므로 $\overline{\mathrm{GF}}=3\sqrt{2}$이다.
따라서 사각뿔대의 부피는
$\frac{1}{3}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}-\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$
$=\frac{52\sqrt{2}}{3}$이다.

21. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
다섯 번째 사람의 답이 Ro라면
대답에 Ro가 2번 들어가 있기 위해서
앞의 네 사람 중 단 한사람의 답이 Ro여야 한다.
다섯 번째 사람의 답이 Ru라면
대답에 Ro가 2번 들어가 있기 위해서
앞의 네 사람 중 두 사람의 답이 Ro여야 한다.
날씨가 맑을 경우 대답에 Ro가 2번 들어가 있을 확률은
$4\times(0.8)^2(0.2)^3+6\times(0.8)^2(0.2)^3$
$=10\times(0.8)^2(0.2)^3$ 이다.
날씨가 흐릴 경우 대답에 Ro가 2번 들어가 있을 확률은
$4\times(0.8)^3(0.2)^2+6\times(0.8)^3(0.2)^2$
$=10\times(0.8)^3(0.2)^2$ 이다.
따라서 마지막 사람의 대답에 Ro가 2번 들어가 있었을 때 날씨가 맑을 확률은
$$\frac{10\times(0.8)^2(0.2)^3}{10\times(0.8)^2(0.2)^3+10\times(0.8)^3(0.2)^2}=\frac{1}{5}$$

22. [출제의도] 미분계수 계산하기
$f(x)=e^{2x-1}+\ln x$
$f'(x)=2e^{2x-1}+\frac{1}{x}$
따라서 $f'(\frac{1}{2})=2+2=4$

23. [출제의도] 확률밀도함수 이해하기
$f(x)=-x+k \quad (0\le x\le k)$가 확률밀도함수
이므로 $\int_0^k x\,dx=\frac{1}{2}k^2=1$이다.
따라서 $15k^2=30$이다.

24. [출제의도] 평면운동 이해하기

$\int_0^4\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}\,dt=$
$\int_0^4\sqrt{(3\cos t-4\sin t)^2+(4\cos t+3\sin t)^2}\,dt$
$=\int_0^4\sqrt{25\sin^2t+25\cos^2t}\,dt=\int_0^4\sqrt{25}\,dt$
$=\int_0^4 5\,dt=[5t]_0^4=20$이다.

25. [출제의도] 타원의 성질 이해하기
$\mathrm{F}(4,0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{FF'}}=8$이다. 이 때, $\overline{\mathrm{PF}}=x$
라 하면 타원의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{PF'}}=10-x$ 이다.
$\triangle \mathrm{PFF'}$은 직각삼각형 이므로
$x^2+(10-x)^2=64,\ 2x^2-20x+36=0,$
$x(10-x)=18$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=x(10-x)=18$이다.

26. [출제의도] 정규분포를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
호박의 질량은 정규분포 $\mathrm{N}(10,1^2)$를 따른다.
호박의 질량을 확률변수 X라 하면
$\mathrm{P}(X\ge11.3)=\mathrm{P}(Z\ge1.3)=0.1$이다.
호박 10000개를 추출할 때 특산품의 개수는
이산확률분포 $\mathrm{B}(10000,0.1)$을 따르고 추출한
개수가 충분히 크므로 특산품의 개수는
정규분포 $\mathrm{N}(1000,30^2)$를 따른다.
따라서 특산품의 개수를 확률변수 Y라고
할 때, $p=\mathrm{P}(Y\ge1030)=\mathrm{P}(Z\ge1)=0.16$
이다. 따라서 $100p=16$이다.

27. [출제의도] 삼각함수의 극한 계산하기
삼각형 ABD의 넓이는
$\frac{1}{2}r(\theta)(2+\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BD}})=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AD}}$이므로
$r(\theta)(2+\frac{1}{\cos\theta}+\sqrt{3}-\tan\theta)=\sqrt{3}-\tan\theta$
$r(\theta)=\frac{\sqrt{3}-\tan\theta}{(2+\frac{1}{\cos\theta}+\sqrt{3}-\tan\theta)}$
$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{3}-\theta}=\frac{\sqrt{3}-\tan\theta}{(2+2+\sqrt{3}-\sqrt{3})(\frac{\pi}{3}-\theta)}$
$\frac{\pi}{3}-\theta=t$라고 하면
$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}-}\frac{\sqrt{3}-\tan\theta}{4(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{3}-\tan(\frac{\pi}{3}-t)}{4t}$
$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}-\tan t}{1+\sqrt{3}\tan t}}{4t}=\frac{4\tan t}{4t}=1$
따라서 $100k=100$이다.

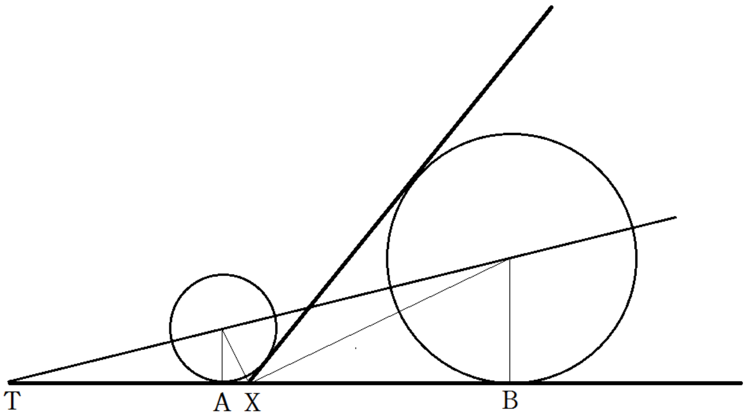
28. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

친구를 초대하는 전체 경우의 수는
$({}_5C_3)^3$ 이다. 모든 친구를 적어도 한 번 초대해야 하므로 전체 경우의 수에서 어떤 친구가 초대되지 않는 경우의 수를 빼야한다. 이 때, 어떤 친구가 초대되지 않는 경우의 수는 5명의 친구를 각각 한 명씩 제외한 후 남은 4명 중에서 초대하는 전체 경우의 수인 ${}_5C_1\times({}_4C_3)^3$에서 10을 뺀 것이다. ($\because$ 위의 경우의 수가 단 3명만을 초대할 때의 경우의 수를 2번 중복하여 포함하고 있다. 즉, 3일 연속으로 같은 3명의 친구만 초대할 수도 있다.) 따라서 초대하는 경우의 수는
$1000-310=690$이다.

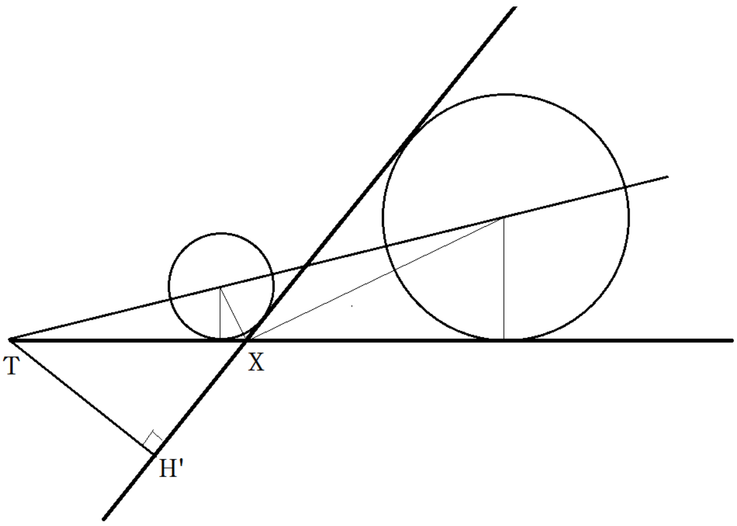
29. [출제의도] 벡터의 내적의 최댓값 추론하기
별도해설.

30. [출제의도] 미적분을 이용하여 함수 추론하기
별도해설.

평면 α와 평면 β는 60° 각도를 이룬다.
이 두 평면에 접하는 두 구의 중심은 yz평면 위에 있고 점 T를 지나는 직선에 접하므로 점 T와 구 S_1의 중심을 지나는 직선은 구 S_2의 중심을 지난다. (두 구가 점 T를 꼭지점으로 하는 원뿔에 접하고 있다고 생각하시면 됩니다. 두 구의 중심의 위치가 yz평면 위로 한정되었기 때문에 두 구의 x좌표는 0으로 고정되고 두 평면에 접하기 때문에 구의 중심의 y, z좌표는 한 변수로 나타낼 수 있습니다. 이 상태에서 구 S_1의 크기가 주어지고 두 구가 한 직선에 접하게 되면 비례관계에 의해서 S_2의 크기가 확정되고 두 구의 중심의 좌표가 확정됩니다.)
평면과 두 구를 단면화하여 보면



두 구가 평면 β와 만나는 점을 각각 A, B라고 하고 평면 α와 평면 β의 교선과 y축과의 교점을 X라고 하면 구 S_1의 반지름이 $\sqrt{3}$이므로 삼각비에 의해 $\overline{\mathrm{AX}}=1$, $\overline{\mathrm{TA}}=6$이다.
구 S_2의 반지름을 r이라 하면 $\overline{\mathrm{XB}}=\sqrt{3}\,r$이다. 닮음의 성질에 의해
$\dfrac{\sqrt{3}}{\overline{\mathrm{TA}}}=\dfrac{r}{\overline{\mathrm{TB}}}$에서 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{r}{7+r\sqrt{3}}$이므로 $r=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$, $\overline{\mathrm{XB}}=7$이다.
이때 H_1와 H_2는 타원의 두 초점이고 $\overline{\mathrm{XH}_1}=\overline{\mathrm{XA}}=1$, $\overline{\mathrm{XH}_2}=\overline{\mathrm{XB}}=7$이므로
타원의 장축의 길이는 8, 두 초점사이 거리는 6이다. 따라서 $k=8$이다.
내적 $\overrightarrow{\mathrm{TP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{H}_1\mathrm{P}}$에서 T에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\overline{\mathrm{XH'}}=\dfrac{7}{2}$이다.



$\overrightarrow{\mathrm{TP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{H_1P}} = (\overrightarrow{\mathrm{TH'}} + \overrightarrow{\mathrm{H'P}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{H_1P}} = \overrightarrow{\mathrm{H'P}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{H_1P}}$이다. ($\overrightarrow{\mathrm{TH'}}$과 $\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}$는 수직)

이때, $\overrightarrow{\mathrm{H'P}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{H_1P}} = (\overrightarrow{\mathrm{H'H_1}} + \overrightarrow{\mathrm{H_1P}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{H_1P}} = \overrightarrow{\mathrm{H'H_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{H_1P}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}\right|^2$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{H'H_1}}$은 변하지 않고 점 P가 점 $\mathrm{H_1}$에서 멀어질수록 $\overrightarrow{\mathrm{H_1P}}$값이 커지고 $\overrightarrow{\mathrm{H'H_1}}$와의 각이 작아지므로 점 P가 점 $\mathrm{H_1}$에서 가장 먼 곳에서 최대이다.

(점 $\mathrm{P(x, y)}$로 놓고 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$을 만족한다고 한 후 좌표를 통해 내적하면 x가 양수일 때 x가 증가하면 내적값이 항상 증가합니다.)

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{TP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{H_1P}} = (\frac{7}{2} + 8) \times 7 = \frac{161}{2}$

$m = \frac{161}{2}$, $km = 644$이다.

(나) 조건에서 함수 $g(x)$가 (nk, nk) 대칭임을 알 수 있다.
이때 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $f(x)$와 $y=x$ 대칭이고, 점 (nk, nk)이 $y=x$ 위에 있으므로 $f(x)$ 역시 (nk, nk) 대칭임을 알 수 있다.
$f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여 (nk, nk) 대칭이므로 $n=1$부터 대입하여 보면
$f(x)$는 (k, k), $(2k, 2k)$, $(3k, 3k)$, $(4k, 4k)\cdots$ 대칭이다.
이때 (다) 조건에서 양의 실수 중 홀수를 제외한 모든 양의 실수에서만 이계도함수를 가진다고 했으므로 홀수에서는 이계도함수를 가지지 않는다.
(가)에서 함수 $f(x)$는 주어진 구간에서 이계도함수를 가지므로 $x=nk$에서만 이계도함수를 가지지 않을 수 있다.
따라서 $k=1, f''(0)=0, f''(1)\neq 0$이다.
이때 $f(x)$는 미분 가능하므로 (nk, nk)를 지난다. $k=1$이므로 $n=1$일 때, $f(1)=1$이다.
닫힌구간 $[0, 1]$에서
$f(x)=axe^x+bx^2+cx$
$f'(x)=a(x+1)e^x+2bx+c$
$f''(x)=a(x+2)e^x+2b$
이므로
$f(1)=1$에서 $ae+b+c=1\cdots\cdots$㉠
$f''(0)=0$에서 $2a+2b=0\cdots\cdots$㉡ 이다.
이때, $f(x)$는 역함수를 가지므로 $f'(x)\geq 0$이다.
닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$의 최솟값은 $f'(0)$이다.
따라서 $f'(0)=a+c\geq 0\cdots\cdots$㉢이다.
㉡에서 $b=-a$이므로 ㉠에 대입하여 정리하면 $a=\dfrac{1-c}{e-1}$이다.
이를 ㉢에 대입하면 $\dfrac{1-c}{e-1}+c\geq 0$이고 정리하면 $c\geq -\dfrac{1}{e-2}$이다.
$\displaystyle\int_0^3 f(x)dx$에서 $f(x)$가 $(1, 1)$ 대칭이므로 $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$는 2이다.
또한 구간 $(2, 3)$에서 $f(x)$는 구간 $(0, 1)$에서의 $f(x)$를 평행 이동한 꼴이므로
$\displaystyle\int_2^3 f(x)dx=2+\int_0^1 f(x)dx$이다.
따라서 $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx=4+\int_0^1 f(x)dx$이고 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$가 최소일 때 최소이다.
$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$가 최소일 때, $x=0$에서의 기울기가 최소이고 따라서 c가 최소이다.
(풀이가 너무 직관적이라고 생각하시면 아래와 같이 적분을 하셔도 좋습니다.
$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\left[a(x-1)e^x-\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}cx^2\right]_0^1=\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}c$이다.
$a=\dfrac{1-c}{e-1}$이므로 $\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{2}c=\dfrac{3e-7}{6(e-1)}c+\dfrac{2}{3(e-1)}$이다. $3e>7$이므로 c의 계수는 양수이고 따라서 c가 최소일 때 최솟값을 갖는다.)

따라서 $a=\dfrac{1}{e-2}$, $b=-\dfrac{1}{e-2}$, $c=-\dfrac{1}{e-2}$이다.

적분하면 $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx=4+\int_0^1 f(x)dx=4+\frac{1}{e-2}\int_0^1 (xe^x-x^2-x)\,dx$

$$=4+\frac{1}{e-2}\left[(x-1)e^x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=4+\frac{1}{6(e-2)}$$

따라서 $p=\dfrac{1}{6}$, $q=4$이고 $\dfrac{q}{p}=24$이다.